KK684

1 fl 15
12
1 fl 27

[illegible]

Sammlung geometrischer Aufgaben aus der Planimetrie

von

L. Woeckel,

Assistent der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Nürnberg.

Hugo v [redacted]

Mit 4 Figurentafeln.

Nürnberg,
Verlag von Ferdinand von Ebner.
1834.

Vorrede.

Durch nachstehende Sammlung von geometrischen Aufgaben aus der Planimetrie glaubt der Herausgeber einem lange gefühlten Bedürfnisse, eine größere Anzahl derselben in einem zum Schulgebrauch eingerichteten Buche vorzufinden, abgeholfen zu haben, — einem Bedürfnisse, das hauptsächlich in neuester Zeit, wo durch die Errichtung der Gewerbsschulen in unserm Vaterlande die Geometrie wie wohl noch zu keiner Zeit so große und rege Theilnahme gefunden, um so fühlbarer und bemerklicher wurde.

Diese Schulen hatte er vor allen im Auge und in der nämlichen Tendenz, nach welcher man dieselben eingerichtet wissen will, daß nämlich alles geistlose und mechanische Lehren, in so fern dieß anders geschehen kann, ernstlich vermieden, bei dem strengen Gange der Wissenschaft aber zugleich die praktische Seite ins Auge gefaßt werde, ist die Sammlung vorliegender Aufgaben abgefaßt.

Die Aufgaben sind so geordnet, daß sie mit Hilfe der einfachen Lehrsätze aus der niedern Geometrie streng wissenschaftlich und zwar auf die Weise der alten Geometer bewiesen werden können (deßhalb auch nur bei

den schwierigeren die Beweise blos kurz angedeutet, bei den leichteren aber ganz weggelassen und dem Nachdenken des Schülers anheim gestellt sind), daß ihre Folge sich so viel als möglich an den Lehrgang, den man gewöhnlich in der Geometrie nimmt, anschließt und keine frühere eine spätere voraussetzt, und endlich so gewählt, daß sie, in so weit es sich mit dem Vorigen verträgt, zur Lösung vieler Aufgaben, die im gewöhnlichen Leben fast bei jedem Stande und Geschäfte hie und da vorkommen, gehörig Aufschluß geben. Ausgeschlossen sind demnach alle die Aufgaben, deren Lösung zwar leicht angegeben, (wie in mancher Anleitung zur praktischen Zeichnungslehre zu finden) deren Richtigkeit aber durch die Sätze und Kräfte der niedern Geometrie nicht bewiesen und deßhalb für den denkenden Schüler nicht zur Ueberzeugung werden kann, so wie alle diejenigen, deren Lösung nur durch Rechnung und die Hilfe der Analysis möglich ist.

Was aber die praktische Seite betrifft, die dadurch der Planimetrie abzugewinnen ist, so möchte diese freilich noch viel zu wünschen übrig lassen; aber wie sollte dieß nicht der Fall seyn in einem so großen Gebiete wie selbst das der niedern Geometrie, dessen Reichhaltigkeit noch lange unerforscht bleiben wird. Doch werden selbst die wenigen Aufgaben hinreichen, den Schüler von der Brauchbarkeit der Geometrie im bürgerlichen Leben zu überzeugen und den künftigen Gewerbsmann für die Mühe, die er auf deren Erlernung wandte, außer der geistigen Bildung die er dadurch erhielt, noch durch den Nutzen

ihrer Anwendung in seinem Berufsgeschäfte schadlos halten. Dem Lehrer ist es dabei überlassen, bei jeder solchen praktischen Aufgabe den Schüler auf deren Nutzanwendung, wozu er gewiß Gelegenheit genug hat, aufmerksam zu machen, und es wird sich ihm bei diesem Verfahren gar bald die Bemerkung aufdringen, daß auch der minder befähigte Schüler sich erst dann um so eher zur theoretischen Auffassung eines Satzes hingezogen fühlt, wenn er von dessen Wahrheit zur Lösung von Aufgaben Gebrauch machen sieht.

Aus letzterem Grunde glaubt auch der Herausgeber, daß, wenn man den Schüler gleich bei dem ersten Unterrichte in der Geometrie mit Aufgaben beschäftigt, dadurch nicht wenig die Liebe und der Eifer für die Geometrie gefördert werden wird.

Ob durch gegenwärtige Sammlung diese Ansicht selbst gefördert und man durch sie in den Stand gesetzt ist, dem Schüler ein brauchbares Buch um einen geringen Preis (der verhältnißmäßig hohe Preis der mathematischen Bücher erlaubt es ohnehin nur der geringeren Anzahl Schüler sich dieselben anzuschaffen und weißt die größere darauf hin, die Diktate des Lehrers nachzuschreiben) in die Hände geben zu können, mögen Lehrer und Freunde der Geometrie beurtheilen.

Der Herausgeber.

Bemerkungen.

Unter Linie ist, wo es nicht ausdrücklich bemerkt, stets gerade Linie zu verstehen.

$=$ Zeichen der Gleichheit.

$>$ $<$ ⸗ ⸗ Ungleichheit, wo die kleinere Größe an der Spitze steht.

$+$ ⸗ ⸗ Addition.

$\parallel$ ⸗ des Parallelseyns.

$\sim$ ⸗ dor Aehnlichkeit.

$\angle$ ⸗ des Winkels.

R ⸗ des rechten Winkels.

$\square$ ⸗ des Parallelogramms.

$\triangle$ ⸗ des Dreiecks.

Aufgabe 1.

Von einem gegebenen Punkte aus zu einem andern gegebenen eine (gerade) Linie zu ziehen.

Lösung.

Lege die Kante oder Schärfe des Lineals genau an die gegebenen zwei Punkte, und ziehe längs derselben von dem einen zum andern eine Linie, wie jedermann bekannt ist.

Um aber zu prüfen, ob das gebrauchte Lineal richtig und die Linie wirklich gerade sey, so kehre man das Lineal auf seine andere Fläche um, ohne die beiden Enden zu verwechseln, lege es genau an die vorhin gezogene Linie an und ziehe wie oben längs derselben Kante wieder eine Linie. Fällt diese genau auf die vorige und zeigt sich nirgends eine Ausbeugung, so ist das Lineal richtig und die Linie gerade.

Aufgabe 2.

Aus einem als Mittelpunkt gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben, der durch einen andern gegebenen Punkt geht.

Lösung. Fig. 1.

Setze in dem als Mittelpunkt gegebenen Punkte A den einen Fuß des Zirkels ein, und beschreibe

mit einer Zirkelöffnung, welche der Entfernung des andern gegebenen Punktes B vom Mittelpunkte A gleich ist, einen Kreis, so ist solches der verlangte.

Aufgabe 3.

Ein gleichseitiges Dreieck über eine gegebene Linie zu verzeichnen.

Lösung. Fig. 2.

Aus jedem der Endpunkte A und B der gegebenen Linie AB beschreibe mit dem Halbmesser AB einen Kreisbogen. Aus dem Punkte C, wo beide Bögen sich schneiden, ziehe die Linien CA, CB, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Aufgabe 4.

Aus drei gegebenen Linien, von denen aber zwei zusammengenommen größer als die dritte sind, ein Dreieck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 3.

Irgend eine der drei gegebenen Linien, hier CB, nehme man als Grundlinie des zu beschreibenden Dreiecks an. Aus dem einen ihrer Endpunkte C beschreibe man mit der zweiten gegebenen Linie CA einen Kreisbogen, so wie aus dem andern B mit der dritten gegebenen Linie BA einen zweiten Kreisbogen. Von dem Punkte A aus, wo beide Bögen sich schneiden, ziehe AC, AB, so ist ACB das verlangte Dreieck.

Aufgabe 5.

Ein Dreieck ist gegeben. Man soll ein diesem congruentes zeichnen.

Lösung.

Diese Aufgabe kehrt ganz auf die vorhergehende zurück. Die drei Seiten des gegebenen Dreiecks sind die drei gegebenen Linien, aus denen man ein Dreieck beschreiben soll.

Aufgabe 6.

An eine gegebene Linie einen Winkel zu legen, der einem gegebenen Winkel gleich sey.

Lösung. Fig. 4.

Die Schenkel des gegebenen Winkels BAC schneide man durch eine beliebige Linie BC, so entsteht dadurch das Dreieck ABC. Schneidet man nun auf der gegebenen Linie DE das Stück DG = AB ab und beschreibt auf demselben △ DGF = △ ABC, so ist ∠ GDF = ∠ BAC.

Bequemer ist es, wenn man (Fig. 5.) die Linie BC so zieht, daß ABC ein gleichschenkliges Dreieck wird. Dieß geschieht, wenn man aus A mit einer beliebigen Zirkelöffnung einen Kreisbogen zieht, der die beiden Schenkel schneidet. Beschreibt man dann aus D einen Kreisbogen mit demselben Halbmesser und macht von G aus Sehne GF = Sehne BC und zieht DF, so ist ∠ GDF = ∠ BAC.

Aufgabe 7.

Aus zwei gegebenen begränzten Linien und dem Winkel, welchen sie einschließen, das Dreieck zu verzeichnen.

Lösung. Fig. 6.

An die gegebene Linie AB lege man im Punkte A den gegebenen Winkel x; schneide auf dessen Schenkel AQ die zweite gegebene Linie AC ab und ziehe CB, so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 8.

Auf einer gegebenen Linie in einem bestimmten Punkte ein Perpendikel zu errichten.

Lösung. Fig. 7.

Von dem gegebenen Punkte C aus schneide nach beiden Seiten beliebig gleiche Stücke, CA = CB, auf der gegebenen Linie ab. Ueber AB beschreibe ein beliebig gleichschenkliges Dreieck, so stehet die Linie DC, welche die Spitze dieses mit dem gegebenen Punkte C verbindet, auf AB perpendikulär.

Aufgabe 9.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Lösung. Fig. 8.

Auf den beiden Schenkeln des gegebenen Winkels BAC schneide beliebig große, gleiche Stücke, AE = AD, ab. Ziehe ED und beschreibe auf dieser Linie einen beliebig gleichschenkligen Triangel EDF.

Verbindet man dessen Spitze mit dem Scheitel des gegebenen Winkels durch die Linie AF, so halbirt diese den Winkel.

Aufgabe 10.

Eine gegebene begränzte Linie zu halbiren.

Lösung. Fig. 9.

Oberhalb und unterhalb der gegebenen Linie AB beschreibe man beliebige, am besten gleiche, gleichschenklige Dreiecke. Verbindet man ihre Spitzen durch eine Linie, so halbirt diese die Linie AB im Punkte E.

Ist aber die gegebene Linie für den Zirkel zu groß, um über sie die verlangten Dreiecke beschreiben zu können, (Fig. 9*.) so schneide man zuvor von beiden Punkten aus so lange gleiche Stücke auf der Linie ab AM = BN, MQ = NR, bis der noch übrige Theil RQ in X auf die obige Art getheilt werden kann.

Aufgabe 11.

Auf eine gegebene Linie von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte ein Perpendikel zu fällen.

Lösung. Fig. 9.

Aus dem gegebenen Punkte C beschreibe man einen Kreis, der die gegebene Linie in zwei Punkten A und B schneidet. Oberhalb oder unterhalb AB beschreibe man ein beliebig gleichschenkliges Dreieck,

so stehet die Linie CE, welche dessen Spitze mit dem gegebenen Punkte verbindet, wenn sie im ersten Falle gehörig verlängert wird, im Punkte E auf AB perpendikulär.

Aufgabe 12.

Aus einem gegebenen Punkte nach einem andern gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, welche länger als das Lineal ist, wenn man einen Zirkel von hinreichender Größe hat.

Lösung. Fig. 10.

Wenn die größtmöglichste Zirkelöffnung größer als die Hälfte der Entfernung der gegebenen Punkte A und B ist, so beschreibe aus A und B oberhalb und unterhalb der zu ziehenden Linie gleiche gleichschenkliche Dreieck. Vereinigt man deren Spitzen C und D durch eine Linie und beschreibt wiederum auf dieser aus den Punkten C und D nach beiden Seiten hin gleichschenklige Dreiecke, so liegen deren Spitzen F, G sowohl als der Mittelpunkt E der CD in der AB, welche demnach gezogen werden kann, wenn das Lineal nur so groß als der vierte Theil der zu ziehenden Linie ist.

Aufgabe 13.

Eine der Richtung nach gegebene Linie mit einem kurzen Lineale auf eine unbestimmte Weite zu verlängern.

Lösung. Fig. 11.

Auf einem kleinen Theil MB der gegebenen Linie AB errichte oberhalb und unterhalb gleiche gleichschenklige Dreiecke MRB, MQB. Ueber die Linie RQ, welche die Spitzen beider verbindet, beschreibe man gleichfalls ein gleichschenkliges Dreieck, so liegt dessen Spitze X in der gegebenen Richtung der Linie AB und man kann diese Linie, wenn das gleichschenklige Dreieck nicht zu groß genommen wurde, von B nach X verlängern. Auf eine gleiche Weise verlängert man die AX beliebig weiter.

Aufgabe 14.

Eine gerade Linie und außerhalb ihr zwei Punkte sind gegeben. In der gegebenen Linie einen Punkt zu finden, daß die von ihm an die gegebenen Punkte gezogenen Linien gleich groß sind.

Lösung. Fig. 12.

Es sey AB die gegebene Linie, C und D die gegebenen Punkte. Verbindet man C und D durch eine Linie, errichtet im Mittelpunkte E derselben ein Perpendikel, so trifft dieses die AB in F und bezeichnet daselbst den Punkt, wo FC = FD.

Aufgabe 15.

In dem längeren Schenkel eines gegebenen Winkels einen Punkt zu bestimmen, daß die von ihm an den Endpunkt des kürzeren Schenkels gezogene Linie

der Entfernung gleich sey, um welche der Punkt von dem Endpunkte des längeren Schenkels absteht.

Lösung. Fig. 13.

Verbinde die Endpunkte der Schenkel des gegebenen Winkels ABC durch die Linie AC; halbire diese in D und errichte daselbst ein Perpendikel, das die Linie BC in E trifft. Ziehe von E nach A und C Linien, so hat man AE = EC, wie verlangt wurde.

Aufgabe 16.

Eine gerade Linie und außerhalb ihr zwei Punkte sind gegeben. In der gegebenen Linie einen Punkt zu finden, daß die von ihm an die gegebenen Punkte gezogenen Linien mit der gegebenen Linie gleiche Winkel machen.

Lösung. Fig. 14.

Aus einem der gegebenen Punkte D, C, z. B. aus C fälle man auf die gegebene AB das Perpendikel CE und verlängere dasselbe bis FE = CD. Zieht man nun von F nach D die FD, so schneidet diese die AB in G, und G ist der Punkt in AB, wo $\angle$ CGA = $\angle$ DGB.

Denn $\angle$ CGE = $\angle$ EGF = $\angle$ DGB.

Aufgabe 17.

Durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, welche mit einer andern gegebenen Linie parallel ist.

Lösung. Fig. 15.

1. Von dem gegebenen Punkte C aus ziehe man eine beliebige Linie CM an die gegebene Linie AB, so entstehen Nebenwinkel. Legt man nun einen von diesen an CM im Punkte C und zwar an die entgegengesetzte Seite, so giebt der Schenkel CT dieses Winkels die Richtung an, in welcher die Linie QP zu ziehen ist, wenn sie mit AB parallel laufen soll.
2. Ziehe (Fig. 16.) CM, CO und beschreibe über CO das Dreieck CTO = △ CMO, so giebt CT die Richtung an, in welcher die mit AB parallele QP zu ziehen ist.
3. Fälle aus C auf AB (Fig. 17.) das Perpendikel CD, und errichte in einem andern beliebigen Punkte E der Linie AB ein zweites Perpendikel EF. Schneidet man auf diesem die EG = CD ab und zieht durch C und G eine Linie, so ist diese mit AB parallel.

Aufgabe 18.

Einen gegebenen kleinen Winkel zu vervielfachen.

Lösung. Fig. 18.

Ziehe innerhalb des gegebenen Winkels A an dessen Schenkel DE = EF = FG = GH = AD, so ist ∠ EDC = 2 A.

∠ FEG = 3 A.

$\angle$ GFH = 4 A.

$\angle$ HGB = 5 A.

Aufgabe 19.

Die Hälfte, das Viertel, das Achtel u. s. w. eines gegebenen Winkels anzugeben, ohne ihn wirklich zu theilen.

Lösung. Fig. 19.

Ziehe in den Schenkeln des gegebenen Winkels CAB = x eine beliebige Linie CB. Verlängert man nun AB rückwärts bis AD = AC und zieht CD, so ist der Winkel CDB = $\frac{1}{2}$ $\angle$ CAB = $\frac{1}{2}$ x. Macht man wiederum DE = CD und zieht EC, so ist $\angle$ CEB = $\frac{1}{2}$ $\angle$ CDB = $\frac{1}{4}$ $\angle$ CAB = $\frac{1}{4}$ x u. s. w.

Aufgabe 20.

In einen spitzigen Winkel soll eine gegebene Linie so gelegt werden, daß sie auf dem einen Schenkel senkrecht steht.

Lösung. Fig. 20.

In einem beliebigen Punkte M des Schenkels AB auf dem die gegebene Linie MN senkrecht stehen soll, errichte ein Perpendikel = MN und ziehe durch den Endpunkt N dieses mit AB eine Parallele bis sie den zweiten Schenkel AC in Q trifft. Fällt man von Q aus auf AB das Perpendikel QR, so ist die Linie QR = MN nach Verlangen in den Winkel gelegt.

Aufgabe 21.

Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels eine gegebene gerade Linie unter einem gegebenen Winkel einzutragen.

Lösung. Fig. 21.

An einem beliebigen Punkte M des Schenkels AB vom gegebenen Winkel ABC lege eine Linie MN unter dem gegebenen Winkel x; schneide auf ihr MR = der gegebenen Linie ab und ziehe durch R eine Parallele mit AB, welche den andern Schenkel BC in Q schneiden wird. Durch Q ziehe QS || MR, so ist QS dem Verlangen gemäß eingetragen.

Aufgabe 22.

Zwei convergirende Linien, die nicht bis zum Durchschnittspunkte verlängert werden dürfen, durch eine andere Linie so zu schneiden, daß die inneren Gegenwinkel auf einer Seite einander gleich sind.

Lösung. Fig. 22.

Durch einen beliebigen Punkte M der einen convergirenden Linie CD ziehe MN parallel mit der andern convergirenden AB und halbire den Winkel CMN, so ist die Halbirungslinie MR die verlangte Linie.

$\angle$ CMR = NMR.

$\angle$ NMR = MRA.

$\angle$ CMR = MRA.

Aufgabe 23.

Auf einer gegebenen Linie in ihrem Endpunkte ein Perpendikel zu errichten.

Lösung. Fig. 23.

Schneide vom Punkte A der gegebenen Linie AB, wo das Perpendikel errichtet werden soll, eine beliebige Linie AC ab und beschreibe über ihr ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck ADC. Verlängert man dessen einen Schenkel DC bis DE = DC und zieht die Linie EA, so steht solche auf AB perpendikulär.

$\angle x + v = y + w = R.$

(Siehe Aufgabe 152. wo noch eine Lösungsart obiger Aufgabe gegeben ist.)

Aufgabe 24.

Ueber einer gegebenen Linie ein Quadrat zu beschreiben.

Lösung. Fig. 24.

Im Punkte A errichte auf der gegebenen Linie AB nach der vorigen Aufgabe ein Perpendikel AC. Schneide auf diesem AD = AB ab und beschreibe aus den Punkten D und B mit dem Halbmesser AB zwei Kreisbögen. An den Punkt E, wo beide sich schneiden, ziehe man BE und DE, so hat man das verlangte Quadrat ABED.

Aufgabe. 25.

Ein Parallelogramm aus einem gegebenen Winkel und den beiden diesen einschließenden Seiten zu vollenden.

Lösung. Fig. 25.

An den Punkt A der einen gegebenen Seite AB lege unter dem gegebenen Winkel x die zweite Seite AC. Aus dem Punkte C beschreibe mit dem Halbmesser AB, so wie aus dem Punkte B mit dem Halbmesser AC Kreisbögen; zieht man nach D, wo beide sich schneiden, die Linien BD, CD, so erhält man das verlangte Parallelogramm.

Aufgabe 26.

Ein Dreieck zu construiren, welches an einer gegebenen begrenzten Seite zwei gegebene Winkel, deren Summe kleiner als 2 R. ist, anliegend enthält.

Lösung. Fig. 26.

An den einen Endpunkt der gegebenen Linie AB lege den einen gegebenen Winkel x, an den andern den zweiten gegebenen Winkel y. Im Punkte C schneiden sich die Schenkel beider Winkel und bilden die Spitze des verlangten Dreiecks ACB.

Aufgabe 27.

Ein Dreieck zu construiren, welches eine gegebene begrenzte Seite und zwei Winkel, deren Sum-

me kleiner als 2 R ist und wovon der eine der gegebenen Seite gegenübersteht, enthält.

Lösung. Fig. 27.

An den Punkt A der gegebenen Linie AB lege man den einen gegebenen Winkel x, in dessen verlängerten Schenkel man einen beliebigen Punkt D wählt und an ihn den zweiten Winkel y legt. Geht der Schenkel DE dieses Winkels durch den Endpunkt B der Linie AB, so ist ADE das verlangte Dreieck. Ist dieses aber nicht der Fall, so ziehe man aus B die Linie BC || DE und △ ACB entspricht der Forderung.

Aufgabe 28.

Ueber eine gegebene Linie ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 28.

Halbire die gegebene Linie AB in C und errichte im Halbirungspunkte ein Perpendikel CM. Macht man CD = CA = der Hälfte der gegebenen Linie AB und zieht DA, DB, so ist ADB das verlangte Dreieck.

(Eine zweite Lösungsart Aufgabe 161.)

Aufgabe 29.

Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Diagonale gegeben ist.

Lösung.

Nach der vorigen Aufgabe beschreibe über der

gegebenen Diagonale ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, so ist solches die Hälfte des gegebenen Quadrats, das sich nun leicht vervollständigen läßt.

Aufgabe 30.

Auf eine gegebene Linie ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel an der Spitze gegeben ist.

Lösung. Fig. 29.

In der Mitte D und dem einen Endpunkte A der gegebenen Linie AB errichte Perpendikel DM, AN. An AN lege in A einen Winkel NAC = dem halben gegebenen Winkel, dessen Schenkel das in der Mitte der Linie errichtete Perpendikel in C schneidet. Ziehe CB, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Aufgabe 31.

Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn dessen Grundlinie nebst einem ihr anliegenden Winkel, so wie die Differenz der beiden andern Seiten gegeben ist.

Lösung. Fig. 30.

An den Punkt A der gegebenen Grundlinie AB lege den gegebenen Winkel BAM. Schneide auf dessen Schenkel AM ein Stück AC = der gegebenen Differenz der Seiten ab und ziehe CB. Errichtet man im Mittelpunkte D dieser Linie ein Perpendikel, welches die AM in E schneidet und zieht man EB, so ist AEB das verlangte Dreieck.

Aufgabe 32.

Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn die Summe zweier Seiten, die dritte Seite und ein ihr anliegender Winkel gegeben ist.

Lösung. Fig. 31.

An die gegebene dritte Seite AB lege unter dem gegebenen Winkel x die Linie AC = der Summe der zwei andern Seiten. Zieht man CB und legt an diese Linie im Punkte B den Winkel CBD = ACB, so ist ADB das zu verzeichnende Dreieck.

Aufgabe 33.

Um einen gegebenen Punkt ein Dreieck zu verzeichnen, dessen Winkel und die Entfernungen des gegebenen Punkts von den Seiten des Dreiecks gegeben sind.

Lösung. Fig. 32.

Lege um den gegebenen Punkt D drei Winkel ADB, BDC, CDA, von denen der erstere den gegebenen Winkel M, der zweite den gegebenen N und der dritte den gegebenen Winkel Q des zu verzeichnenden Dreiecks zu 2 R ergänzet. Trägt man nun auf die Schenkel dieser Winkel von D aus die gegebenen Entfernungen DE, DF, DG und errichtet auf den Linien DA, DB, DC in den Punkten G, F, E Perpendikel, so schneiden sich diese nach beiden Seiten verlängert in M, N und Q, und MNQ ist das verlangte Dreieck.

Aufgabe 34.

Ein Dreieck zu zeichnen aus drei gegebenen Winkeln und der Summe zweier Seiten, welche einen bestimmten Winkel einschließen.

Lösung. Fig. 31.

An die Linie AC, welche der gegebenen Summe der zwei Seiten gleich ist, lege im Punkte A unter einem der gegebenen Winkel die unbestimmte AB und im Punkte C die CB unter einem Winkel, welcher der Hälfte des bestimmten Winkels, den die Seiten einschließen, gleich ist. Legt man im Punkte B, wo der Schenkel dieses Winkels die AB trifft, einen gleich großen Winkel, so daß ∠ ACB = ∠ CBD und verlängert dessen Schenkel bis er die AC in D trifft, so ist ADB das verlangte Dreieck.

Aufgabe 35.

Ein gleichseitiges Dreieck aus dem von einer Spitze auf die gegenüberstehende Seite gegebenen Perpendikel zu zeichnen.

Lösung. Fig. 32.

Man beschreibe ein beliebiges gleichseitiges Dreieck ABC und fälle aus dessen Spitze C das Perpendikel CD. Trägt man nun auf dieses (wo nöthig verlängertes) die gegebene Höhe DM auf und zieht aus M, die MN || AC, MR || BC, so ist NMR das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 36.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, von dessen spitzigen Winkeln der eine dreimal so groß ist als der andere.

Lösung. Fig. 34.

Man beschreibe zuerst ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ABC. Verlängert man die Seite AB bis man auf der Verlängerung die Hypotenuse BC abschneiden kann und zieht DC, so ist ADC das verlangte Dreieck.

$$x = y = 2\,m$$
$$n = m$$
$$\overline{}$$
$$y + n = 3\,m$$

Aufgabe 37.

Ein Dreieck zu verzeichnen aus zwei gegebenen Seiten und dem Unterschiede der diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel.

Lösung. Fig. 35.

Lege die gegebenen Seiten AB, AC unter dem gegebenen Winkelunterschied an einander und ziehe CB. An diese Linie lege man im Punkte B den Winkel CBD = $\angle$ ACB und verlängere BD bis DE = AD, so ist, wenn man AE zieht, ABE das verlangte Dreieck. BE = AC.

Aufgabe 38.

Ein Dreieck zu verzeichnen, dessen Grundlinie

und der ihr gegenüberliegende Winkel, so wie der Unterschied der beiden andern Seiten gegeben ist.

Lösung. Fig. 36.

An die Punkte A und B einer beliebigen Linie MN lege Winkel an, welche der Hälfte des Aussenwinkels vom gegebenen Winkel gleich sind und verlängere ihre Schenkel bis sie sich in C schneiden. Verlängere ferner einen dieser Schenkel z. B. CA über den Punkt A um den gegebenen Unterschied AD und beschreibe aus D mit einem Halbmesser, welcher der gegebenen Grundlinie gleich ist, einen Kreis, so schneidet dieser die MN in E. Zieht man aus diesem Punkt die EF || CB, so ist DEF das verlangte Dreieck. AC = CB.

AF = FE.

$\angle$ FAE = $\angle$ FEA = ½ $\angle$ EFC.

Aufgabe 39.

Ueber eine gegebene Linie ein reguläres Sechseck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 37.

Ueber die gegebene Linie AB beschreibe ein gleichseitiges Dreieck ABC; verlängere CA und CB und trage auf jede dieser verlängerten Seiten die gegebene AB zweimal auf. Zieht man EG, und macht GH = GF, EK = ED, so ist, wenn man

HF und DK zieht, die Figur ADKHFB das verlangte Sechseck.

EG || AB

EG = 3 AB und Dreieck CEG ist gleichseitig und gleichwinklig, so wie auch die an den Ecken abgeschnittenen kleinen Dreiecke. Hieraus ergiebt sich die Gleichheit aller Seiten und Winkel des Sechseckes.

Aufgabe 40.

Ueber eine gegebene Linie ein reguläres Achteck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 38.

Ueber die gegebene Linie AB beschreibe nach Aufgabe 28. ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ACB und trage auf jede der verlängerten Seiten CA, CB zuerst die gegebene Linie AB und dann die Seite AC des gleichschenkligen Dreiecks. Vollendet man das Quadrat ECGH, macht EK = HL = HM = NG = AC und zieht die Linien DK, LM, NF, so ist ABFNMLKD das verlangte Achteck.

Die kleinen Dreiecke in den Ecken sind alle gleich groß und gleichschenklig und es ist nun leicht zu beweisen, daß alle Seiten und Winkel des Achteckes gleiche Größe haben.

Aufgabe 41.

Ein Viereck zu verzeichnen, wenn dessen gegenüberstehende Seiten und drei Winkel gegeben sind.

Lösung. Fig. 39.

An die eine der gegebenen Seiten AB lege zwei der gegebenen Winkel x und y; legt man nun in einem beliebigen Punkte des Schenkels AC die gegegebene Linie CF unter dem dritten gegebenen Winkel z an und zieht aus F eine Parallele mit AC bis diese den andern Schenkel BD in G schneidet, so darf man nur die GH || CF ziehen, um das verlangte Viereck AHGB zu erhalten.

Aufgabe 42.

Ein Viereck zu zeichnen, wenn drei auf einander folgende Seiten gegeben sind und die vierte auf den beiden anliegenden Seiten rechtwinklig steht.

Lösung. Fig. 40.

Weil die vierte Seite auf den beiden anliegenden Seiten rechtwinklich stehen soll, so müssen diese Seiten parallel laufen. Auf der größeren AB der beiden parallel laufenden, schneide die kleinere AE = DC ab und errichte im Punkte E und A Perpendikel. Beschreibt man nun aus dem Punkte B mit der dritten gegebenen Seite BC einen Kreis, welcher das Perpendikel EF in C schneidet und zieht man CD || AE, so ist ABCD das verlangte Viereck.

Aufgabe 43.

Ein Viereck zu zeichnen aus drei gegebenen auf

einander folgenden Seiten und den beiden Winkeln, welche an der vierten Seite liegen.

Lösung. Fig. 41.

An einen Punkt A der unbestimmten Linie AM lege unter dem einen der gegebenen Winkel die Linie AB von der Größe der ersten gegebenen Linie, und eben so an einen anderen Punkt C die CD unter dem andern der gegebenen Winkel und von der Größe der dritten gegebenen Linie. Durch D ziehe NR || AM und beschreibe aus B mit einem Halbmesser von der Größe der zweiten gegebenen Linie einen Kreis, der die NR in E schneidet. Zieht man aus E die EF || CD, so ist ABEF das verlangte Viereck.

Aufgabe 44.

Ein Viereck zu zeichnen aus den vier gegebenen auf einander folgenden Winkeln und der gegebenen Summe zweier aneinander liegenden Seiten.

Lösung. Fig. 42.

Man beschreibe ein beliebiges Viereck ABCD, welches die vier gegebenen aufeinander folgenden Winkel hat. Auf der verlängerten AB mache BE = BC und AF = der Summe der zwei aneinander liegenden Seiten. Zieht man CE, aus F die FG || CE und endlich aus G die GH || CB, so ist AHGD das verlangte Viereck.

CB = BE.

GH = HF.

AH + HG = AF.

Aufgabe 45.

In ein gegebenes rechtwinkliges Dreieck ein Quadrat zu beschreiben.

Lösung. Fig. 43.

Den rechten Winkel des gegebenen Dreiecks ABC halbire durch AD und ziehe aus D die DE ∥ AB, und die DF ∥ AC, so ist AEDF das verlangte Quadrat.

Aufgabe 46.

In ein gegebenes Dreieck so groß als möglich ein Quadrat zu beschreiben.

Lösung. Fig. 44.

Auf die größte Seite AB des gegebenen Dreiecks ABC fälle aus der gegenüber liegenden Spitze C das Perpendikel CD und beschreibe über diese Linie das Quadrat CDEF. Zieht man dessen Diagonale FC und zieht von dem Punkte G aus, wo diese die Linie AC schneidet, GH ∥ AB, GI ∥ CD und endlich HK ∥ CD, so ist GHKI das verlangte Quadrat.

BG : BF = GI : FE.

BG : BF = GH : FC.

GI : FE = GH : FC.

FE = FC.

GI = GH.

Aufgabe. 47.

Um ein gegebenes Quadrat ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen ähnlich ist.

Lösung. Fig. 45.

An die Seite AB des gegebenen Quadrats ABCD lege in den Endpunkten zwei Winkel an, welche zweien Winkeln des gegebenen Dreiecks gleich sind x = a, y = b und verlängere deren Schenkel bis sie sich in E und die verlängerte CD in F und G schneiden, so ist FEG das verlangte Dreieck.

Aufgabe 48.

Innerhalb eines rechten Winkels soll ein Rhombus gezeichnet werden, von dem zwei Spitzen die Schenkel so berühren, daß bei einer jeden zu beiden Seiten zwei gleiche Winkel entstehen, und dessen Seiten durch zwei innerhalb des Winkels gegebene Punkte gehen.

Lösung. Fig. 46.

Von den gegebenen Punkten D und E fälle auf den jedem zunächst liegenden Schenkel des gegebenen Winkels ABC Perpendikel DF, EG. Verlängert man jedes um seine eigene Größe über den Schenkel hinaus, d. i. macht man FH = DF, GI = EG und zieht HI, so werden die Schenkel in K und L

geschnitten und KL ist die Seite des verlangten Rhombus, wo die der KL anliegenden Seiten durch die Punkte D und E gehen.

Aufgabe 49.

Ein Parallelogramm in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien mit zweien gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms parallel laufen.

Lösung. Fig. 47.

Jede der beiden andern Seiten, welche diesen bestimmten Seiten des Parallelogramms anliegen, theile in die bestimmte Anzahl gleicher Theile und verbinde die gleichen Theilungspunkte dieser beiden Seiten durch Linien, so ist das Verlangte geschehen.

Soll z. B. das Parallelogramm ABCD in fünf gleiche Theile getheilt werden und sollen die Theilungslinien mit AD, BC parallel laufen, so theile man AB und CD in fünf gleiche Theile in den Punkten E, F, G, H; K, L, M, N, und ziehe EK, FL, GM, HN, und die Aufgabe ist gelöst.

Aufgabe 50.

Ein Parallelogramm in ein ihm gleiches Rechteck zu verwandeln.

Lösung. Fig. 48.

Errichte auf der Linie AB des gegebenen Paral-

lelogramms ABCD in den Punkten A und B die Perpendikel AM, BN. Verlängert man die Linie CD bis sie die AM in E schneidet, so ist AEFB das verlangte Rechteck.

Aufgabe 51.

Ein Parallelogramm in ein anderes von gegebenem Winkel zu verwandeln.

Lösung. Fig. 48.

An die Linie AB des gegebenen Parallelogramms ABCD lege im Punkte A den gegebenen Winkel GAB, dessen Schenkel die DC (wo nöthig verlängert) in G trifft. Zieht man aus B mit AG eine Parallelle bis sie von der verlängerten DC in H geschnitten wird, so ist GABH das verlangte Parallelogramm.

Aufgabe 52.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches an der Grundlinie einen gegebenen Winkel hat.

Lösung. Fig. 49.

Durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks ABC ziehe MN || AB. Lege an AB im Punkte A einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist und dessen Schenkel die MN in D trifft. Zieht man DB, so ist ADB das verlangte Dreieck.

Aufgabe 53.

Ein gegebenes Dreieck in ein gleich großes Parallelogramm zu verwandeln.

Lösung. Fig. 50.

Durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks ACB ziehe MN || AB; halbire AB in D und beschreibe über AD ein beliebiges Parallelogramm, wo die der AD gegenüberstehende Seite CE in der parallelen MN liegt, so ist ▭ ADCE = △ ACB.

Soll das Parallelogramm einen gegebenen Winkel haben, so lege man an AD im Punkte A den gegebenen Winkel und vollende das Parallelogramm.

Aufgabe 54.

Ein Parallelogramm in ein Dreieck von einem gegebenen Winkel zu verwandeln.

Lösung. Fig. 51.

An die Linie AB des gegebenen Parallelogramms ABCD lege im Punkte A einen Winkel, der dem gegebenen des Dreiecks gleich ist und verlängere dessen einen Schenkel bis er die CD oder ihre Verlängerung in E trifft. Verlängert man die AB bis BF = AB und zieht FE, so ist AFE das verlangte Dreieck.

Aufgabe 55.

Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Lösung. Fig. 52.

Durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks ABC ziehe man MN || AB. Ferner halbire man AB und errichte im Halbirungspunkte D eine senkrechte DF; zieht man FA, FB, so ist AFB das verlangte Dreieck.

Aufgabe 56.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches mit ersterem einen Winkel gleich hat, dessen eine Seite aber gegeben ist.

Lösung. Fig. 53.

Verlängere eine der Seiten im gegebenen Dreiecke ABC, welche den gleichen Winkel einschließen z. B. die AB, bis man auf ihrer Verlängerung die gegebene Seite BD des zu construirenden Dreiecks abschneiden kann. Ziehe CD und aus A die AE || CD. Verlängert man nun die BC bis sie die AE in E schneidet und zieht DE, so ist DBE das verlangte Dreieck.

Aufgabe 57.

Ein gegebenes Dreieck in ein anderes von gegebener Grundlinie zu verwandeln.

Lösung.

a) Wenn die Grundlinie des gegebenen Dreiecks (Fig. 54.) größer ist als diedes gesuchten, und in derselben Richtung liegt.

Auf der Grundlinie AB des gegebenen Drei-

ecks ABC schneide die gegebene Grundlinie AD des gesuchten Dreiecks ab. Zieht man CD und mit ihr aus B eine Parallele, welche die verlängerte AC in E trifft, so ist, wenn man von D nach E eine Linie zieht, AED das gesuchte Dreieck.

b) Wenn die Grundlinie des gegebenen Dreiecks (Fig. 55.) kleiner ist als die des gesuchten und in derselben Richtung liegt. Verlängere die Grundlinie AB des gegebenen Dreiecks ABC bis man die gegebene Grundlinie AD darauf abschneiden kann. Ziehe CD und aus B die BE || CD, so ist, wenn man die Punkte E und D durch eine Linie verbindet, AED das verlangte Dreieck.

c) Wenn die Grundlinie in einer anderen gegebenen Richtung z. B. in der Richtung der Linie AM liegt. (Fig. 56.) Ziehe durch B die BD || AC und die Linie CD, so ist ACD das verlangte Dreieck.

Aufgabe 58.

Ein gegebenes Dreieck in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln.

Lösung.

a. Wenn die Höhe des gegebenen Dreiecks größer ist als die des gesuchten. Fig. 57.

Auf der Linie AB des gegebenen Dreiecks ABC

errichte das Perpendikel AD von der gegebenen Höhe und ziehe durch D die DE || AB, bis sie eine Seite des gegebenen Dreiecks trifft. Ziehe EB und mit dieser aus C parallel die CF, welche die verlängerte AB in F schneidet. Verbindet man die Punkte E und F durch eine Linie, so ist AEF das verlangte Dreieck.

b. Wenn die Höhe des gegebenen Dreiecks kleiner ist als die des gesuchten. Fig. 58.

Man errichte gleichfalls auf der Linie AB des gegebenen Dreiecks ABC das Perpendikel AD von der gegebenen Höhe und ziehe durch D eine Parallele mit AB, welche die verlängerte Seite AC in E trifft. Zieht man EB, CF || EB, und endlich EF, so ist AEF das verlangte Dreieck.

Aufgabe 59.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Spitze gegeben ist.

Lösung. Fig. 54.

Liegt die Spitze E schon in irgend einer Seite des gegebenen Dreiecks oder in deren Verlängerung z. B. in AC, so verfahre man wie in der Aufgabe 57. Ist jedoch dieses nicht der Fall, so verwandele man zuerst das gegebene Dreieck ABC in ein solches, dessen Seite, wo nöthig verlängert, durch die gege-

bene Spitze E geht nach Aufgabe 52. und verfahre wie oben.

Aufgabe 60.

Ein gegebenes Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Lösung. Fig. 59.

1. Durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks ABC ziehe MN || AB. Errichtet man nun in A und B die Perpendikel AD, BF so erhält man das Rechteck ADFB, welches doppelt so groß als das gegebene Dreieck ist. Halbirt man zwei gegenüberstehende Seiten dieses Rechtecks und zieht GH, KL so entstehen zwei neue Rechtecke ABGH, ADLK, wovon jedes dem gegebenen Dreieck gleich ist.
2. Ziehe wiederum durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks (Fig. 60.) die Parallele MN. Halbire die beiden Seiten des Dreiecks AC, CB und errichte durch die Halbirungspunkte D und E Perpendikel auf AC, so schneiden diese verlängert die MN in H und K und FGHK ist das verlangte Rechteck.

Aufgabe 61.

Ein gegebenes Viereck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Spitze in einer Ecke des Vierecks liegt und dessen Grundlinie längs einer Seite desselben fällt.

Lösung. Fig. 61.

Aus der bestimmten Ecke D des gegebenen Vierecks ABCD ziehe nach der gegenüberstehenden Ecke die Diagonale DB und mit ihr aus C die Parallele CE, welche der verlängerten AB in E begegnet. Zieht man DE, so ist AED das verlangte Dreieck.

Aufgabe 62.

Jedes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

Lösung. Fig. 62.

1. Ist ABCDE das gegebene Vieleck mit lauter ausspringenden Winkeln, so sucht man eine Ecke nach der andern hinwegzuschaffen. Um dieß bei der Ecke B zu erreichen, ziehe man die Diagonale AC, und mit ihr durch B die Parallele BF. Verlängert man nun die AE bis sie diese Parallele in F schneidet und zieht FC, so ist die fünfseitige Figur ABCDE bereits in die vierseitige FCDE übergegangen.

   Die Ecke D sucht man auf dieselbe Weise wie die Ecke B wegzuschaffen und man erhält für die fünfseitige Figur ABCDE das Dreieck FCG, welches gleichen Flächeninhalt mit jener hat.

2. Ist ABCDEF das gegebene Vieleck (Fig. 63.) mit dem einspringenden Winkel B, so schafft man die Ecke B hinweg, wenn man die Linie CA zieht

und mit ihr durch B die Parallele BG. Zieht man nun CG, so ist die anfänglich sechsseitige Figur in die fünfseitige GCDEF übergegangen. Mit dem Hinwegschaffen der übrigen Ecken verfährt man wie oben.

Aufgabe 63.

Jede beliebige Figur in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Spitze in einem bestimmten Punkte entweder auf einer Seite der Figur, oder innerhalb oder außerhalb derselben liege und dessen Grundlinie längs einer gegebenen Seite der Figur falle.

Lösung.

Nach der vorigen Aufgabe verwandele die gegebene Figur in ein Dreieck und solches wiederum nach Aufgabe 59. in ein Dreieck, dessen Spitze in einem gegebenen Punkte liegt und dessen Grundlinie längs einer gegebenen Seite des Dreiecks fällt, so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 64.

Zwei Dreiecke von ungleicher Höhe in eines zu verwandeln.

Lösung. Fig. 64.

Die zwei gegebenen Dreiecke ACB, BDE bringe man auf einer Grundlinie nebeneinander und ziehe durch die Spitze E des kleineren eine mit der Grundlinie parallele Linie, welche die Seite CB des grö-

ßeren Dreieckes in F schneidet. Zieht man FD, so ist unsere Aufgabe auf die zurückgebracht: die Figur ADFC in ein Dreieck zu verwandeln, welches leicht nach Aufgabe 62 geschehen kann.

Man ziehe CD und aus F die FG || CD, endlich CG, so ist ACG das verlangte Dreieck.

Aufgabe 65.

Ein Dreieck zu beschreiben, das mehreren anderen gegebenen, gleich hohen Dreiecken gleich sey.

Lösung. Fig. 65.

Die gegebenen Dreiecke ABC, BDE, EFG bringe man alle auf die Linie AG an einander. Ziehe CG, so ist das Dreieck ACG so groß wie die drei gegebenen.

Aufgabe 66.

Von einem gegebenen Dreieck ein anderes von geringerer Höhe so wegzunehmen, daß der Rest ein Dreieck ist.

Lösung. Fig. 64.

Wenn ACB, BDE die gegebenen Dreiecke sind, so verfahre man zuerst ganz wie in der vorletzten Aufgabe. Anstatt aber das Dreieck CBG, welches dem gegebenen kleineren BDE gleich ist, zum größeren ACB zu addiren, subtrahire man dasselbe, indem man BH = BG macht und CH zieht. Als Rest bleibt △ ACH.

Aufgabe 67.

Ein Dreieck in eine beliebig vielseitige Figur zu verwandeln.

Lösung. Fig. 66.

Aus der Spitze C des gegebenen Dreiecks ABC ziehe beliebig CD und mit ihr durch A eine Parallele AM. Wählt man nun in dieser Linie einen von A verschiedenen Punkt E und zieht ED, EC, so hat die Figur schon eine Seite mehr gewonnen und das Dreieck ABC ist in die vierseitige Figur DECB übergegangen.

Auf gleiche Weise verfährt man, wenn man die bereits erhaltene Figur in eine noch mehrseitige verwandeln will.

Aufgabe 68.

Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes von gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln.

Lösung. Fig. 67.

Nach Aufgabe 51. verwandele zuerst das gegebene Parallelogramm in ein anderes ABCD von dem gegebenen Winkel ABC. Auf die Verlängerung der Seite AB trage von B aus die Linie BE = der gegebenen Seite des Parallelogramms und eben so mache CF $\underline{\underline{\parallel}}$ BE. Zieht man durch B und F eine Linie bis die verlängerte DA ihr in G begegnet,

und durch G die GH || AB, durch F die FH || BC und verlängert die BC bis zu ihrem Zusammentreffen mit der Linie GH in I, so ist BIHE das verlangte Parallelogramm.

Aufgabe 69.

Eine beliebige geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln von gegebener Seite und gegebenem Winkel.

Lösung.

Verwandele die gegebene Figur nach Aufgabe 62. in ein Dreieck und solches wiederum nach Aufgabe 53. in ein Parallelogramm. Letzteres aber nach der vorigen Aufgabe in ein Parallelogramm von der gegebenen Seite und dem gegebenen Winkel.

Aufgabe 70.

Ein gegebenes Rechteck in ein anderes zu verwandeln von einer gegebenen Seite.

Lösung. Fig. 68.

Trage auf die Verlängerung der Seite AB des gegebenen Rechtecks ABCD die gegebene Seite BE und ziehe von E durch C eine Linie bis solche von der verlängerten AD in F geschnitten wird. Zieht man aus F die FG || AE, aus E die EG || AF und verlängert die DC und BC bis sie die so eben gezogenen Parallelen in H und I treffen, so ist CHGI das verlangte Rechteck.

Aufgabe 71.

Ein Quadrat in einen Rhombus von gegebener Seite zu verwandeln.

Lösung. Fig. 69.

Ueber der Seite AB des gegebenen Quadrats ABCD beschreibe das Parallelogramm ABEF, wo die gegenüberstehenden Seiten AE, FB der gegebenen Seite des Rhombus gleich sind. Verwandelt man dann dieses Parallelogramm über der Linie AE wiederum in ein anderes, wo die Seiten AG, EH der AE gleich sind, so ist AEHG der verlangte Rhombus.

Aufgabe 72.

Ein Quadrat in einen Rhombus zu verwandeln, dessen Diagonale gegeben ist.

Lösung. Fig. 70.

Ziehe im gegebenen Quadrate ABCD die beiden Diagonalen und verlängere eine derselben nach beiden Seiten über die Ecken des Quadrats, bis man vom Punkte E die EF = EG = der halben gegebenen Diagonale darauf abschneiden kann. Ziehe FB und aus C die CH || FB, so giebt FH die Seite des Rhombus an, der FG zur Diagonale hat und es ist das Quadrat ABCD = dem Rhombus FHGK.

CEB = FEH = $\frac{1}{4}$ Quadrat = $\frac{1}{4}$ Rhombus.

Aufgabe 73.

Ein Parallelogramm zu beschreiben, welches der

Hälfte eines gegebenen Dreiecks gleich ist und einen Winkel desselben hat.

Lösung. Fig. 71.

Halbire die drei Seiten des Dreiecks ABC in D, E, F und ziehe DE, FE, DF, so erhält man drei Parallelogramme AFED, DFEB, EDFC, wovon jedes der Hälfte des gegebenen Dreiecks gleich ist. Man wähle von ihnen nun dasjenige, welches den verlangten Winkel hat.

Aufgabe 74.

Zwei gegebene Parallelogramme in eines zu verwandeln.

Lösung. Fig. 72.

Man lege die beiden Parallelogramme ABCD, CEFG unter einem beliebigen Winkel aneinander und verlängere ihre Gegenseiten DA, GF bis sie sich im Punkte H schneiden. Ziehe BE und durch H und C die HI und mit ihr die Parallelen BK, EL. Zieht man endlich noch die KL, so ist BELK das verlangte Parallelogramm.

Denn ▭ ABDC = ▭ BCHK = ▭ BIMK.
▭ CEFG = ▭ CELH = ▭ IELM.

Aufgabe 75.

Ein Paralleltrapez in ein Parallelogramm über der kleineren der parallelen Seiten zu verwandeln.

Lösung. Fig. 73.

Mit der Seite BC des Paralleltrapezes ABCD ziehe die AG parallel, welche die Seite DC in E schneidet. Halbire die DE in F und ziehe aus F die FG || Diagonale AC. Zieht man aus dem Punkte G, wo letztere die AG schneidet die GH || AB und verlängert BC, so ist AGHB das verlangte Parallelogramm.

△ FEA = GEC.

2 △ FEA = 2 GEC.

△ DEA = □ GECH.

Aufgabe 76.

Ein Paralleltrapez in ein Parallelogramm über der größeren der parallelen Seiten zu verwandeln.

Lösung. Fig. 74.

Mit der Seite BC des Paralleltrapezes ABCD ziehe die AE parallel, welche die verlängerte CD im Punkte E schneidet. Halbirt man DE in F, zieht FG || AC und GH || AB, so ist AGHB das verlangte Parallelogramm.

△ AGF = △ FCG.

△ AEF = △ CEG.

△ DEA = ▭ ECHG.

△ GLA = LHCD.

Aufgabe 77.

Ein gegebenes Trapezoid in ein Rechteck zu verwandeln.

Lösung. Fig. 75.

Ziehe die Diagonale CB des gegebenen Trapezoids ABCD und mit ihr aus den gegenüberstehenden Punkten A und D parallele Linien. Legt man an dieselbe Diagonale CB in den Punkten C und B zwei Linien, welche mit ihr rechte Winkel bilden, und verlängert sie nach beiden Seiten bis sie die obigen Parallelen in den Punkten E, F, G, H schneiden, so ist EFGH ein Rechteck, welches doppelt so groß als das Trapezoid ist.

Theilt man nun das Rechteck in zwei gleiche Theile, so entspricht jeder von diesen, GNFM oder NHME, der Forderung.

Aufgabe 78.

Mehrere Quadrate in eines zu verwandeln.

Lösung. Fig. 76.

Man setze die Seiten zweier gegebenen Quadrate rechtwinklig aneinander und ziehe die Hypotenuse, so ist ihr Quadrat so groß als die Quadrate dieser beiden Seiten, oder so groß als die beiden gegebenen Quadrate; setzt man weiter an diese Hypotenuse die Seite eines dritten gegebenen Quadrats rechtwinklig an und zieht eine neue Hypotenuse, so ist ihr Quadrat so groß als die drei gegebenen Quadrate u. s. w.

Es sollen z. B. die drei gegebenen Quadrate

ABCD, EFGH, IKLM in eines verwandelt werden. Setze an AB unter einem rechten Winkel die AR = EF; ziehe RB, so ist das Quadrat von RB so groß als die beiden Quadrate ABCD und EFGH. Legt man ferner an RB die RQ = IK rechtwinklig an und zieht BQ, so ist das Quadrat BQVW den drei Quadraten ABCD + EFGH + IKLM gleich.

Aufgabe 79.

Ein Quadrat zu beschreiben, welches zweimal, dreimal, viermal, fünfmal u. s. w. größer ist als ein gegebenes.

Lösung. Fig. 77.

An die Seite AB des gegebenen Quadrats lege rechtwinklig AC = AB. Zieht man CB, so ist $CB^2 = 2 \cdot AB^2$.

An CB lege man rechtwinklig BD = AB, so ist $CD^2 = 3\ AB^2$.

Verlängert man BD, bis BE = CB, und zieht CE, so ist $CE^2 = 4\ AB^2$.

Zieht man von A nach E eine Linie, so hat man $AE^2 = 5\ AB^2$. u. s. w.

Auf diese Weise fährt man fort, daß man immer die Seite des gegebenen Quadrats und die gefundene Seite eines n mal größeren, oder die Seiten dieser größeren selbst rechtwinklig aneinander

setzt und die Hypotenuse zieht. Beschreibt man über diese ein Quadrat, so ist solches so groß als die Quadrate der beiden andern Seiten des rechtwinkligen Dreieckes, und daher so oftmal größer als das gegebene Quadrat, als diese beiden Quadrate zusammen mal größer als dasselbe sind.

Macht man $EF = BE$, so ist $CF^2 = 6\ AB^2$.
Ferner $EG = CD$, so ist $CG^2 = 7\ AB^2$.
$EH = CE$, so ist $CH^2 = 8\ AB^2$.
u. s. w.

Aufgabe 80.

Auf eine gegebene Linie ein Dreieck von einem gegebenen Winkel zu beschreiben, welches einem gegebenen Rechtecke gleich ist.

Lösung. Fig. 78.

Auf der gegebenen Linie AB errichte ein Perpendikel AD von der Höhe des Rechteckes MNPQ. Ist nun AB größer oder kleiner als MN, so mache man $BE = 2\ MN$, lege an B den gegebenen Winkel und ziehe $DF \parallel EB$ und die Linie FE. Nun verwandele man das $\triangle$ EFB nach Aufgabe 57 in ein Dreieck, dessen Grundlinie AB ist und das Verlangte ist geschehen und man hat $\triangle$ $ABC =$ dem Rechtecke MNPQ.

Aufgabe 81.

Eine gegebene Linie so zu schneiden, daß das

unter der ganzen Linie und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rechteck dem Quadrate des andern Abschnittes gleich sey.

Lösung. Fig. 79.

Ueber der gegebenen Linie AB beschreibe man das Quadrat ABDC; halbire BD in E und ziehe AE. Verlängert man nun die BD bis EF = AE und beschreibt über FB das Quadrat BFGH, so bezeichnet H den Punkt der Linie AB, in welchem sie getheilt werden muß, wenn $AB . AH = HB^2$ seyn soll.

$$DF . BF + BE^2 = EF^2 = AE^2$$

$$DF . BF + BE^2 = AB^2 + BE^2$$

$$DF . BF = AB^2.$$

$$AB . AH = HB^2.$$

Aufgabe 82.

Aus einer Ecke eines gegebenen Dreiecks ist an die gegenüberliegende Seite eine Linie gezogen. Aus dem Punkte, wo diese die Seite trifft eine andere Linie auf die gegenüberstehende Seite so zu ziehen, daß das durch sie und zwei Seiten des gegebenen Dreiecks gebildete Dreieck dem Dreiecke gleich sei, welches durch die erste gezogene Linie abgeschnitten wird.

Lösung. Fig. 80.

Aus der Spitze A des Dreiecks ABC ist auf

die gegenüberliegende Seite CB die Linie AD gezogen.

Man ziehe durch die Spitze C des Dreiecks ABC die CM || AB, welche die von A aus gezogene Linie AD verlängert in E schneidet. Mache DF = DE und ziehe FG || DB. Zieht man endlich DG, so ist GBD das verlangte Dreieck.

△ CAE = △ CBE.

△ CAD = △ DEB = DFB = DGB.

Aufgabe 83.

Ein Parallelogramm so zu halbiren, daß die Halbirungslinie durch einen gegebenen Punkt geht.

Lösung. Fig. 81.

a. Wenn der gegebene Punkt sich in einer Seite des Parallelogramms befindet.

Soll die Halbirungslinie durch E in der Seite AB gehen, so mache CF = AE und ziehe EF, so ist das Parallelogramm gehörig halbirt.

b. Wenn der gegebene Punkt sich außer- oder innerhalb des Parallelogramms befindet.

Ziehe die zwei Diagonalen des Parallelogramms, die sich in H wechselseitig halbiren und von dem gegebenen Punkt G nach diesem Halbirungspunkt eine Linie, weche zwei Seiten des Parallelogramms in K und L

schneidet, so theilt diese das Parallelogramm in zwei gleiche Theile.

Aufgabe 84.

Ein Parallelogramm so zu theilen, daß in jeder Hälfte zwei Paar gleiche Winkel sind.

Lösung. Fig. 82.

Beschreibe aus der Ecke D des gegebenen Parallelogramms ABCD mit dem Halbmesser AD einen Kreisbogen, der die AB in E schneidet. Ziehe DE und durch den Halbirungspunkt H der Diagonalen FG || DE, so ist das Verlangte geschehen.

$$x = y = n = r = t$$
$$x + v = 2R = v + t$$
$$o + r = v + t = v + r$$
$$o = v = w = u.$$

Aufgabe 85.

Ein gegebenes Dreieck in drei gleiche Theile zu theilen, welche ebenfalls Dreiecke sind und deren Spitzen in einem Punkte innerhalb des Dreiecks zusammenstoßen.

Lösung. Fig. 83.

Verbinde die Mittelpunkte D, E, F der Seiten des gegebenen Dreiecks ABC mit den ihnen gegenüber liegenden Winkelspitzen durch die Linien DB, EC, FA, so schneiden sich solche im Punkte G innerhalb des Dreiecks und es ist

△ AGB = △ BGC = △ CGA.

Denn △ ACE = CEB
△ AGE = GEB
△ CGA = BGC

△ ACF = AFB
△ CGF = FGB
△ CGA = AGB = CGB.

Aufgabe 86.

Ein Dreieck so zu halbiren, daß die Theilungslinie durch einen in einer Seite gegebenen Punkt geht.

Lösung. Fig. 84.

Der gegebene Punkt befinde sich in der Seite AB des zu theilenden Dreiecks ABC und zwar in D. Halbire dieselbe Seite des Dreiecks in E und ziehe CE, ferner CD und mit ihr aus E die EF parallel. Zieht man von D nach F eine Linie, so halbirt diese auf die verlangte Weise das Dreieck.

△ CDE = CFD.

Aufgabe 87.

Ein Dreieck durch zwei Linien, die durch einen beliebigen Punkt einer Seite desselben gehen, in drei gleiche Theile zu theilen.

Lösung.

Man theile die Seite AB, wo sich der gege-

bene Punkt D befindet in drei gleiche Theile AE = EF = FB und ziehe CE, CF, so ist das gegebene Dreieck in drei gleiche Dreiecke zerlegt. Zieht man CD, so wird das Dreieck CAD entweder kleiner oder größer als CAE seyn.

a. Ist es kleiner wie Fig. 85., so ziehe man aus E die EG || CD und verbinde D und G durch eine Linie, so ist das Trapez CADG der dritte Theil des gegebenen Dreiecks. Halbirt man dann GB in H und zieht DH, so ist △ HDG = △ HDB = $\frac{1}{3}$ △ ABC, und das Verlangte ist geschehen.

b. Ist das △ CAD > CAE (Fig. 86.), so ziehe wiederum EG || CD und die Linie DG, so ist △ ADG = $\frac{1}{3}$ △ ABC.

Durch den Punkt F ziehe FH || DC und die Linie DH, so ist △ HDB = △ CFB = $\frac{1}{3}$ ABC. Der Rest oder das Trapez CGDH bildet das letzte Drittel des gegebenen Dreiecks ABC.

Aufgabe 88.

Ein Dreieck von einem in einer Seite liegenden Punkte aus in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Lösung. Fig. 87.

Das gegebene Dreieck ABC sey von dem in der Seite AC liegenden Punkte D aus z. B. in

fünf gleiche Theile zu theilen. Man nehme AE = CF = $\frac{1}{5}$ AC; ziehe die Linie DB und mit ihr aus F und E parallel die FG und EH, welche die Seiten CB, AB in G und H treffen. Nun trage man die Linie CG so oft als möglich auf die CB, so daß CG = GI = IK, und eben so die AH so oft als möglich auf AB, so hat man, wenn man noch die Linien DG, DI, DK, DL, DH zieht, die Figur in die fünf gleichen Theile

CDG, GDI, IDK, KDHB, ADH

getheilt.

△ BCF = $\frac{1}{5}$ ABC.

△ BCF = CDG, denn △ BGF = FDG.

Eben so

△ BEA = ADH = $\frac{1}{5}$ ABC.

Die vier Dreiecke nehmen $\frac{4}{5}$ ABC hinweg, daher ist auch der Rest KDHB ebenfalls = $\frac{1}{5}$ ABC.

Aufgabe 89.

Eine jede vierseitige Figur in 2, 4, 8 .. Theile zu theilen.

Lösung. Fig. 88.

Halbire die 4 Seiten des Vierecks ABCD in den Punkten E, F, G, H. Zieht man EF, FG, GH, HE, so bilden diese 4 Linien widerum ein Viereck, welches halb so groß als ABCD ist.

Halbirt man weiter die Seiten EF, FG, GH, HE und verbindet die aneinander liegenden Halbirungspunkte durch Linien, so entstehet ein Viereck, welches nur der vierte Theil von ABCD ist, u. s. w.

Aufgabe 90.

Ein Paralleltrapez in eine beliebige Anzahl Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien mit einer der nicht parallelen Seiten parallel laufen.

Lösung. Fig. 89.

Man verwandle das gegebene Paralleltrapez ABCD in das ihm gleiche Dreieck AED und theile dessen Grundlinie AE in die beliebige Anzahl gleicher Theile z. B. in vier. Zieht man DF, so ist $\triangle$ AFD $= \frac{1}{4}$ ABCD. Dieses Dreieck verwandle man in das ihm gleiche Parallelogramm AGHD, mache GI $=$ HK $=$ IL $=$ KM $=$ AG und ziehe IK, LM, so ist das Trapez auf die verlangte Weise getheilt.

Aufgabe 91.

Ein Trapez zu halbiren.

Lösung. Fig. 90.

Man ziehe die beiden Diagonalen AC, BD des gegebenen Trapezes ABCD, und halbire die eine derselben in E. Zieht man aus E die EF mit der andern Diagonale parallel, und endlich die DF, so ist das Trapez DABF $= \triangle$ DFC $= \frac{1}{2}$ Trapez ABCD.

Denn zieht man DE, EB, so hat man

△ DEA = △ DEC.
△ AEB = △ BEC.
DABE = BEDC.
△ DEB = DFB. u. s. w.

Aufgabe 92.

Ein Trapez so zu halbiren, daß die Halbirungslinie durch die Mitte einer Seiten geht.

Lösung. Fig. 91.

Mit der Seite AB des Trapezes ABCD, in welcher sich der gegebene Punkt E befindet, ziehe aus D die DF parallel. Halbire DF in G und ziehe CG, EG, so ist AEGCD = EBCG.

Zieht man ferner CE, mit ihr aus G die GH parallel und endlich EH, so ist Trapez AEHD = Trapez EHCB = $\frac{1}{2}$ Trapez ABCD.

△ GHE = △ CGH.

Aufgabe 93.

Eine vierseitige Figur aus einer gegebenen Winkelspitze in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Lösung. Fig. 92.

Die der gegebenen Winkelspitze D des Vierecks ABCD gegenüberliegende Diagonale AC theile man in die verlangte Anzahl gleicher Theile, z. B. in vier, so daß AE = $\frac{1}{4}$ AC. Zieht man nun DE,

BE, aus E die EG || der Diagonale DB und endlich die DG, so ist $\triangle$ ADG = $\frac{1}{4}$ ABCD. Die Linie AG trage man von G nach H, so ist ebenfalls $\triangle$ DGH = ADG = $\frac{1}{4}$ ABCD.

Eben so verfahre man auf der andern Seite, wo I der erste Theilungspunkt und CI = $\frac{1}{4}$ AC ist, und man erhält im Ganzen

$\triangle$ ADG = $\triangle$ DGH = $\triangle$ CDL = DLBH = $\frac{1}{4}$ ABCD.

Denn $\triangle$ DAE + EAB = $\frac{1}{2}$ ABCD.

$\triangle$ BAE = $\triangle$ AEG + BEG.

= $\triangle$ AEG + DEG.

$\triangle$ DAE + AEG + DEG = $\frac{1}{2}$ ABCD.

$\triangle$ DAG = $\frac{1}{4}$ ABCD.

Aufgabe 94.

Zu drei gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

Lösung. Fig. 93.

Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels schneide DE = A, EF = B, DG = C ab; ziehe EG und mit dieser durch F parallel die FH, so ist GH die vierte geometrische Proportionallinie zu den Linien A, B, C.

Aufgabe 95.

Zu zwei gegebenen Linien die dritte geometrische Proportionallinie zu finden.

Lösung.

1. Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels Fig. 94. nehme CD = der gegebenen Linie A, DE = B, CF = B; ziehe DF und mit dieser im Punkte E die Parallele EG, so ist FG die dritte geometrische Proportionallinie zu A und B.
2. Man lege Fig. 95. die beiden gegebenen Linien CD = A, DE = B unter einem rechten Winkel aneinander; ziehe CE und lege an sie im Punkte E einen rechten Winkel. Verlängert man CD bis sie den Schenkel dieses Winkels schneidet, so ist DF die verlangte dritte geometrische Proportionallinie.

Aufgabe 96.

Zu zwei gegebenen Linien die mittlere arithmetische Proportionallinie zu finden.

Lösung. Fig. 96.

Construire ein Trapez, wo die gegebenen Seiten AB, CD parallel einander gegenüber liegen. Verbindet man alsdann die Mittelpunkte M, N der zwei andern, nicht parallelen Seiten des Trapezes durch die MN, so ist solche die gesuchte Proportionallinie.

$$AB - MN = MN - DC.$$

Denn $DM : DA = MO : AP$.

$$MO = \tfrac{1}{2} AP.$$

$$AM : AD = AR : AP.$$

$$AR = \tfrac{1}{2} AP.$$

$$MO = AR.$$

Aufgabe 97.

Eine gegebene Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Lösung.

1. An die gegebene Linie AB Fig. 97. welche z. B. in 7 gleiche Theile getheilt werden soll, lege unter einem beliebigen Winkel die unbestimmte Linie AM und trage auf sie von A aus die verlangte Anzahl beliebig gleicher Theile. Verbindet man den Endpunkt R des letzten Theils mit dem Punkte B durch die Linie RB und zieht durch die Theilungspunkte auf AM Parallelen mit RB, so theilen diese die AB in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

2. Um es aber Fig. 97. zu vermeiden, viele Parallelen ziehen zu müssen, so lege man an AB im Punkte B noch eine Linie BN || AM und trage auf sie von B aus dieselben Theile wie auf AM. Zieht man von dem letzten Theilungspunkte R auf AM aus an B eine Linie, und eben so von dem vorletzten Theilungspunkte 6 auf AM aus eine

Linie an den ersten Theilungspunkt 1 auf BN u. s. w., so wird die Linie AB durch diese gezogenen Linien auf die verlangte Weise getheilt.

3. Trage Fig. 98. auf eine unbestimmte Linie MQ die gegebene Anzahl beliebig gleicher Theile und beschreibe über dieser getheilten Linie MN ein gleichseitiges Dreieck MNR. Auf die Schenkel RM, RN, welche, wenn es nöthig ist, verlängert werden, trage die gegebene Linie RA = RB = AB und ziehe AB. Zieht man aus der Spitze R des gleichseitigen Dreiecks durch die Theilungspunkte auf MN Linien, so theilen diese (verlängert) die AB in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

Aufgabe 98.

Eine gegebene Linie im gegebenen Verhältniß zu theilen.

Lösung. Fig. 99.

Man verfahre wie in der vorigen Aufgabe, indem man nur auf die Linien AM, BN, so wie in unserm Falle auf MQ beliebige Theile von dem gegebenen Verhältniß trägt, welches geschieht wenn man so viel beliebig gleiche Theile abschneidet als die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen ausdrückt. Die entsprechenden Punkte verbindet man auf die

angegebene Art durch Linien, so theilen diese die gegebene im bestimmten Verhältniß.

Es soll z. B. die Linie AB in drei Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 1 : 2 : 5. Man trage auf MQ 1 + 2 + 5 = 8 gleiche beliebige Theile; construire wie oben die gleichseitigen Dreiecke und ziehe von R durch 1, 3 Linien, so schneiden sie verlängert die AB in I, III, in dem gegebenen Verhältniße.

Aufgabe 99.

Einen Linientheiler zu verfertigen.

Lösung. Fig. 100.

Man verfertige ein Rechtwinkliges Dreieck oder ein Parallelogramm und theile dessen Höhe AD in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. Zieht man durch diese Theilungspunkte mit der Grundlinie AB des Parallelogramms Parallellinien, so ist der Linientheiler fertig.

Soll z. B. die Linie m n in 8 gleiche Theile getheilt werde, so lege man sie so in das Parallelogramm, daß der eine Endpunkt n auf den Punkt D und der andere m auf die Theilungslinie 8 falle, so ist die Linie in 8 gleiche Theile getheilt und D x $= \frac{1}{8}$ m n.

Aufgabe 100.

Aus einem gegebenen Punkte nach einem andern

gegebenen eine (gerade) Linie zu ziehen, welche länger als das Lineal ist und wenn die größte Oeffnung des Zirkels, den man dazu gebraucht, nicht die Hälfte der Entfernung der beiden gegebenen Punkte beträgt.

Lösung. Fig. 101.

Nach Aufgabe 13 ziehe man in die Richtung des zweiten gegebenen Punktes B vom ersten Punkte A aus eine Linie so, daß man von B aus auf sie das Perpendikel BM zu fällen im Stande ist. Halbirt man die AM in N und errichtet hier einen Perpendikel NQ = der Hälfte von MB, so liegt der Punkt Q in der von A nach B zu ziehenden Linie. Weiter findet man den Punkt R dieser Linie, wenn man in der Mitte von AN einen Perpendikel TR = $\frac{1}{2}$ NQ, und den Punkt X, wenn man im Mittelpunkte von NM den Perpendikel VX = $\frac{1}{2}$ (NQ + BM) errichtet.

$$AN : AM = NQ : MB.$$

$$\tfrac{1}{2}\,AM : AM = NQ : MB = \tfrac{1}{2}\,MB : MB.$$

$$NQ = \tfrac{1}{2}\,MB.$$

$$AV : AM = VX : MB.$$

$$\tfrac{3}{4}\,AM : AM = VX : MB = \tfrac{3}{4}\,MB : MB.$$

$$VX = \tfrac{3}{4}\,MB = \tfrac{1}{2}\,(NQ + MB).$$

Aufgabe 101.

Durch einen innerhalb der Schenkel eines Win-

kels gegebenen Punkt eine Linie zwischen diesen so zu ziehen, daß sie in dem gegebenen Punkte halbirt wird.

Lösung. Fig. 102.

Aus dem gegebenen Punkte D ziehe man mit dem Schenkel AB des gegebenen Winkels CAB eine Parallele ED, welche den andern Schenkel in E trifft. Macht man EG = AE und zieht durch G und D eine Linie GH, so ist solche in D halbirt.

Aufgabe 102.

Durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Linie zwischen den Schenkeln so zu ziehen, daß der eine Abschnitt der Linie 3, der andere 4 gleiche Theile enthält.

Lösung. Fig. 103.

Aus dem gegebenen Punkte D ziehe man mit dem Schenkel AB des gegebenen Winkels CAB eine Parallele DE. Theile AE in drei gleiche Theile und schneide deren vier von E aus auf der AC ab, so daß AE : EF = 3 : 4. Zieht man von F durch D eine Linie FG, so ist diese in F nach dem verlangten Verhältnisse getheilt.

Aufgabe 103.

Den Durchschnittspunkt von zwei sehr schief gegen einander geneigten Linien genau zu bestimmen.

Lösung. Fig. 104.

Errichte auf der einen Linie AB ein Perpendikel KM und in einiger Entfernung von diesem ein zweites DN. Das Stück K 1, welches durch die zweite Linie PQ auf dem ersten Perpendikel abgeschnitten wird, trage man beliebig z. B. achtmal auf demselben auf, und eben dasselbe mache man mit dem Stücke DE auf dem zweiten Perpendikel DN. Verbindet man die Punkte 8 durch die Linie FG und verlängert diese bis sie die AB in H schneidet, so ist H der gesuchte Durchschnittspunkt.

Aufgabe 104.

Zwischen zwei wenig convergirenden Linien diejenige zu bestimmen, welche verlängert den Durchschnittspunkt der zwei ersteren trifft und den durch sie gebildeten Winkel halbirt.

Lösung. Fig. 105.

Ziehe mit einer der convergirenden Linien AB, CD eine Parallele, z. B. EF || AB, und schneide vom Punkte F, wo diese die andere Linie trifft auf derselben ein beliebiges Stück FG ab. Macht man FG = FH, ziehe GH bis sie verlängert die AB in I trifft und errichtet im Mittelpunkt K der GI das Perpendikel KL, so ist solches die verlangte Linie.

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt der gegebenen Linien mit X, so hat man

$$GF : FH = GX : XI$$

also $\angle$ GXI gleichschenklig,

und Perpendikel KL halbirt den Winkel des Dreiecks GXI oder den gegebenen Winkel.

Aufgabe 105.

Eine gegebene Linie nach dem äußern und mittleren Verhältniß, oder so zu theilen, daß der größere der beiden Theile die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem kleineren Theil und der ganzen Linie sey.

Lösung. Fig. 106.

Errichte auf dem Endpunkte A der gegebenen Linie AB ein Perpendikel AC von der halben Länge der Linie AB und vollende das rechtwinklige Dreieck ABC. Schneidet man auf der Hypotenuse ein Stück CD = AC ab und beschreibt mit dem Reste BD aus B einen Kreisbogen, der die AB in E schneidet, so ist hier im Punkte E die Linie AB auf die verlangte Art geschnitten; man hat

$$AE : EB = EB : AB.$$

Denn $(BE + \frac{1}{2} AB)^2 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2$

$$BE^2 + AB.\ EB + \frac{1}{4} AB^2 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2.$$

$$BE^2 = AB^2 - AB.\ EB.$$

$$BE^2 = (AB - EB)\ AB.$$

$$BE^2 = AE.\ AB.$$

$$AE : BE = BE : AB.$$

Aufgabe 106.

Auf einer gegebenen Linie ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen ähnlich ist.

Lösung.

1. An die gegebene Linie DE (Fig. 107.) lege im Punkte D den Winkel FDE = ∠ CAB des gegebenen Dreiecks ACB, und im Punkte E den Winkel FED = ∠ CBA; so befindet sich im Punkte F, wo die Schenkel dieser Winkel sich schneiden, die Spitze des ähnlichen Dreiecks.
2. Lege die gegebene Linie DE (Fig. 108.) auf die Seite AB der gegebenen Figur und ziehe vom Punkte E aus, der in der AB oder ihrer Verlängerung liegt die EF || CB, so trifft solche die AC oder ihre Verlängerung in F, und AEF ist das verlangte Dreieck.

Aufgabe 107.

Auf einer gegebenen Linie eine geradlinige Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen ähnlich und ähnlich liegend ist.

Lösung.

1. Theile die gegebene Figur ABCD (Fig. 109.) durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke und beschreibe alsdann nach der vorigen Aufgabe auf die gegebene Linie EF ein dem Dreieck ADB ähnliches EFG, so wie auf FG ein dem Dreieck

DCB ähnliches △ FGH, so ist Figur ABCD ∼ Figur EFHG.

2. Auf die verlängerte Seite (Fig. 110.) AB der gegebenen Figur ABCDE lege vom Punkte A aus die AL = der gegebenen Linie. Ziehe in der gegebenen Figur die Diagonalen AC, AD und verlängere sie, so wie die Linie AE. Zieht man nun aus L die LK || CB, und vom Punkte K, wo die Parallele die Diagonale schneidet, KI || DC, und eben so IH || DE, so ist ALKIH die verlangte Figur.

Aufgabe 108.

Zwei ähnliche Figuren in eine, beiden ähnliche Figur zu verwandeln.

Lösung.

Man lege zwei homologe Seiten der beiden ähnlichen Figuren rechtwinklig an einander, so ist die Linie (Hypotenuse), welche ihre Endpunkte verbindet, die den homologen Seiten entsprechende Seite der zu verzeichnenden Figur. Beschreibt man auf diese Seite nach der vorigen Aufgabe eine den beiden gegebenen Figuren ähnliche Figur, so hat man die gesuchte.

Aufgabe 109.

Eine Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen ähnlich, aber beliebig mal größer ist.

Lösung.

Wähle irgend eine Seite der gegebenen Figur und suche zu ihr nach Aufgabe 79. die Seite des Quadrats, welches um die gegebene Zahl größer ist, so ist solche die der gewählten Seite homologe Seite in der neuen Figur, welche nach Aufgabe 107. beschrieben wird.

Aufgabe 110.

Ein Dreieck so zu halbiren, daß die Halbirungslinie durch einen gegebenen Punkt innerhalb des Dreiecks geht.

Lösung. Fig. 111.

Ueber der Linie AB des gegebenen Dreiecks ABC beschreibe das Parallelogramm DEFB, welches dem halben gegebenen Dreieck gleich ist und den Winkel B hat, in dessen Ecke sich nicht der gegebene Punkt D befindet, nach Aufgabe 73. Verwandle dieses Parallelogramm in ein anderes HIBK, daß eine Seite HI durch den gegebenen Punkt geht. Errichtet man hierauf in K den Perpendikel KM = DI, und beschreibt aus M mit DH als Halbmesser einen Kreis, der die CB in N schneidet, und zieht durch die Punkte N und D eine Linie, welche verlängert die AB in P schneidet, so ist durch sie das Dreieck auf die verlangte Weise halbirt.

Es ist zu beweisen, daß △ DPI + NQK = HDQ.

In △ NKM ist MK = DI, NM = HD.

$HD^2 = NK^2 + DI^2$.

Aehnliche Figur auf HD = Aehnlichen Figuren auf NK + DI.

Aber △ DPI ∼ △ HDQ ∼ △ NQK.

Aufgabe III.

Ein Dreieck von einem innerhalb desselben liegenden Punkte aus in vier gleiche Theile zu theilen.

Lösung. Fig. 112.

Soll das Dreieck ABC vom Punkte D aus in vier gleiche Theile getheilt werden, so schneide man von den Endpunkten einer Linie AB desselben AE = BF = $\frac{1}{4}$ AB ab, und ziehe Fr ∥ CB, Em ∥ AC, welche von der aus der Spitze des Dreiecks durch den gegebenen Punkt gezogenen CG in r und m geschnitten werden. Zieht man DA, DB und Hm ∥ AD, Kr ∥ DB, verbindet endlich die Punkte D und H, so wie D und K durch Linien, so ist Trapezoid CAHD = △ CDK = $\frac{1}{4}$ △ ABC.

Verlängere alsdann die Linie CB bis man KL = CK darauf abschneiden kann, ziehe LN ∥ DB und aus D die DN, so ist das Trapezoid DKBN = △ KDL = $\frac{1}{4}$ △ ABC, und also der Rest △ HDN ebenfalls = $\frac{1}{4}$ △ ABC.

$\triangle$ ACE = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ ABC.

Gm : GE = GC : AG.

GH : Gm = AG : GD.

GH : GE = GC : GD

Daher DE ∥ HC

$\triangle$ DCH = $\triangle$ ECH.

$\triangle$ DCo = $\triangle$ HEo.

Trapezoid CAHD = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ ABC.

$\triangle$ CFB = $\triangle$ CrB = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ ABC.

$\triangle$ CrB = CDK ($\triangle$ rDK = $\triangle$ rKB)

$\triangle$ CDK = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ ABC.

$\triangle$ DLB = $\triangle$ DBN

Trapezoid DKBN = $\triangle$ KDL = $\triangle$ CDK = $\frac{1}{4}$ $\triangle$ ABC.

Aufgabe 112.

Ueber einer gegebenen Linie einen Kreis zu beschreiben.

Lösung. Fig. 1.

Man halbire die gegebene Linie BC im Punkte A und beschreibe von diesem Punkte aus mit dem Halbmesser CA = AB einen Kreis, so ist dieß der verlangte.

Aufgabe 113.

Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht.

Lösung. Fig. 113.

Aus jedem der gegebenen Punkte A und B be-

schreibe mit dem gegebenen Halbmesser einen Kreis. Sowohl der Durchschnittspunkt C, als D beider Kreise bezeichnen den Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Wann ist die Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 114.

Durch drei Punkte welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Lösung. Fig. 114.

Die drei gegebenen Punkte A, B, C verbinde man durch zwei Linien AB, BC. Halbirt man jede von diesen und errichtet in den Halbirungspunkten D und E Perpendikel, so schneiden sich diese im Punkte F und bezeichnen in diesem den Mittelpunkt des Kreises, der sich mit dem Halbmesser FA = FB = FC durch die drei Punkte beschreiben läßt.

Aufgabe 115.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

Lösung. Fig. 115.

1. Man ziehe im Kreise eine beliebige Sehne AB, halbire sie in C und errichte auf ihr in C eine senkrechte Linie CD, welche, auch nach der andern Seite hin verlängert, den Kreisumfang in E und D trifft. Halbirt man DE in F, so hat man in F den gesuchten Mittelpunkt.

2. Man ziehe im Kreise (Fig. 116.) zwei beliebige Sehnen AB, CD, jedoch so, daß sie nicht parallel laufen. Halbirt man AB in E, CD in F und errichtet in beiden Halbirungspunkten Perpendikel, so bezeichnen diese durch den Punkt G, in welchem sie sich schneiden, den gesuchten Mittelpunkt des gegebenen Kreises.

Aufgabe 116.

Den Kreis, von dem ein Abschnitt gegeben ist, zu vollenden.

Lösung. Fig. 117.

Man ziehe in dem gegebenen Abschnitte AMB zwei beliebige, nicht parallele Sehnen CD, DB. Errichte im Halbirungspunkte jeder von diesen ein Perpendikel, so bezeichnet der Punkt G, wo diese sich schneiden, den Mittelpunkt des zu vollendenden Kreises.

Aufgabe 117.

Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Lösung. Fig. 118.

Ziehe die Sehne AB des gegebenen Kreisbogens; halbire sie in C und errichte in C auf ihr das Perpendikel CD, so theilt dasselbe den Kreisbogen AB im Punkte D in zwei gleiche Theile.

Aufgabe 118.

Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Lösung.

Die Aufgabe ist dieselbe wie die Aufgabe 114. wenn man die Ecken des Dreiecks als die drei nicht in einer geraden Linie liegenden Punkte betrachtet.

Aufgabe 119.

Um ein gleichschenkliges Dreieck einen Kreis zu beschreiben, ohne auf der Mitte zweier Seiten desselben Perpendikel zu errichten.

Lösung. Fig. 119.

Durch den Mittelpunkt D der Grundlinie AB des gegebenen gleichschenkligen Dreiecks ABC ziehe aus der Spitze C die unbestimmte Linie CE. Auf einem der Schenkel z. B. auf AC errichte im Punkte A ein Perpendikel, welches die CE in F schneiden wird. Halbirt man CF in G, so ist G der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Aufgabe 120.

In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Lösung. Fig. 120.

Man halbire irgend zwei Winkel des gegebenen Dreiecks ABC, so bezeichnet der Punkt D, wo die Halbirungslinien sich schneiden, den Mittelpunkt, und die von D auf irgend eine Seite gefällte senkrechte Linie, z. B. DE, den Halbmesser des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 121.

In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Lösung. Fig. 121.

Halbire zwei an einander liegende Seiten AB, BC des gegebenen Quadrats ABCD in E und F. Ziehe aus E die Linie EG || BC und aus F die Linie FH || AB, so bezeichnet der Durchschnittspunkt I den Mittelpunkt des mit dem Halbmesser IE in das Quadrat zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 122.

Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Lösung. Fig. 121.

Ziehe zwei Durchmesser EG, HF des gegebenen Kreises auf einander senkrecht und durch die Endpunkte eines jeden mit dem andern Durchmesser parallele Linien, so bilden solche das verlangte Quadrat ABCD.

Aufgabe 123.

In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Lösung. Fig. 122.

Ziehe zwei Durchmesser des um E gegebenen Kreises AC, BD auf einander senkrecht und ziehe

die Linien AB, BC, CD, DA, so bilden letztere das verlangte Quadrat.

Aufgabe 124.

Um ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Lösung. Fig. 122.

Ziehe die zwei Diagonalen AC, BD, des gegebenen Quadrats ABCD, so bezeichnet deren Durchschnittspunkt E den Mittelpunkt des mit dem Halbmesser EA = EB = EC = ED zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 125.

Ein reguläres Sechseck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben.

Lösung. Fig. 123.

Man trage von irgend einem Punkte A der Peripherie aus den Halbmesser AM des gegebenen Kreises so oft als möglich als Sehne in den Kreis, so wird dieß gerade sechsmal geschehen können. Zieht man die Linien AB, BC, CD, DE, EF, FA, so bilden solche das verlangte reguläre Sechseck.

Aufgabe 126.

In einen gegebenen Kreis das reguläre 8, 16, 32 ꝛc. Eck zu zeichnen.

Lösung. Fig. 124.

Durch den Halbirungspunkt r irgend einer Seiten des in dem Kreise beschriebenen Quadrats, z. B. der hb ziehe bis zum Kreisumfang die Linie Ra. Zieht man ba und trägt diese Linie achtmal im Kreise als Sehne herum, so erhält man das reguläre Achteck im Kreise.

Das reguläre Sechszehneck und überhaupt das reguläre Vieleck von nochmals so viel Seiten als das gegebene hat, findet man auf dieselbe Weise wie man das Achteck aus dem Viereck fand.

Aufgabe 127.

In einen gegebenen Kreis das reguläre 3, 12, 24 ꝛc. Eck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 123.

Nach Aufgabe 125. beschreibe in den Kreis das reguläre Sechseck. Ueberspringt man nun immer eine Ecke und zieht die AC, CE, EA, so ist ACE das reguläre Dreieck.

Um die Seite des regulären Zwölfecks, welches in den Kreis beschrieben werden kann, zu finden, errichte man im Mittelpunkt m irgend einer Seite AB des Sechsecks ein Perpendikel, welches die Peripherie in o trifft. Zieht man Ao, so ist solches die verlangte Seite des Zwölfecks und das Zwölfeck

selber construirt man, wenn man Ao zwölfmal als Sehne im Kreise herumträgt.

Das vierundzwanzig Eck findet man aus dem Zwölfeck eben so, wie man das Zwölfeck aus dem Sechseck gefunden hat.

Derselbe Fall ist es mit jedem regulären Vieleck von nochmals so viel Seiten, als das gegebene hat.

Aufgabe 128.

Um und in jedes reguläre Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Lösung.

Der Mittelpunkt des verlangten Kreises liegt im Durchschnittspunkt der Halbirungslinien zweier benachbarten Winkel oder auch im Durchschnittspunkt der Perpendikel, welche man auf der Mitte zweier anliegenden Seiten errichtet. Die Größe des Halbmessers bezeichnet für den ersten Fall die Halbirungslinie, für den zweiten das Perpendikel.

Aufgabe 129.

Ein reguläres Vieleck im Kreise ist gegeben. Man soll ein demselben ähnliches um den Kreis beschreiben.

Lösung. Fig. 124.

Ziehe die Halbmesser Ra, Rb u. s. w. des gegebenen regulären Achteckes abcdefgh und ziehe durch ihre Endpunkte die Tangenten IQ, IK ꝛc. ꝛc. so durchschneiden sich diese in den Punkten I, K, L

rc. rc. und bilden das dem Kreis umschriebene Achteck IKLMNOPQ.

Aufgabe 130.

Ein Punkt und eine Linie sind der Lage nach gegeben. Aus dem Punkte als Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, der die gegebene Linie berührt.

Lösung. Fig. 125.

Fälle aus dem gegebenen Punkte C auf die gegebene Linie AB ein Perpendikel CD und beschreibe mit dessen Länge CD als Halbmesser aus C einen Kreis, so berührt dieser die AB im Punkte D.

Aufgabe 131.

Ein Punkt in der Peripherie eines Kreises ist gegeben; eine Tangente des Kreises durch diesen Punkt zu ziehen, wenn dessen Mittelpunkt gegeben ist.

Lösung.

1. An den gegebenen Punkt A (Fig. 126.) ziehe den Halbmesser CA. Errichte auf diesem in A ein Perpendikel AT, so giebt dasselbe nach beiden Seiten verlängert die Tang. durch den Punkt A.
2. Ziehe AC und (Fig. 127.) eine beliebige unter einem spitzigen Winkel gegen CA geneigte Linie CB. Im Mittelpunkt der CA errichte das Perpendikel DE, so wird solches die CB in E schneiden. Beschreibt man nun aus E mit dem

Halbmesser EC einen Kreis, so geht dieser durch den Punkt A und schneidet die CB im Punkte F, von welchem aus man durch A die verlangte Tangente FAT zieht.

Aufgabe 132.

Ein Punkt in der Peripherie eines Kreises ist gegeben; eine Tangente des Kreises durch diesen Punkt zu ziehen, wenn man den Mittelpunkt des Kreises nicht kennt.

Lösung. Fig. 128.

Vom gegebenen Punkte A aus ziehe man eine beliebige Sehne AB im gegebenen Kreise. Miß den Peripheriewinkel ACB der in einem der Kreisabschnitte auf der gezogenen Sehne steht und lege denselben im Punkte A an die dem Abschnitte entgegengesetzte Seite von AB, so ist AT die verlangte Tangente.

Aufgabe 133.

Den Punkt genau zu bestimmen, wo eine Tangente den Kreis berührt.

Lösung. Fig. 129.

An einen beliebigen Punkt R der Tangente MN ziehe den Halbmesser CR. Beschreibt man über diesen einen Halbkreis, so ist der Punkt T, wo dieser den Kreis und die Tangente schneidet, der gesuchte Berührungspunkt.

Aufgabe 134.

Aus einem als Mittelpunkt gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben, der einen andern der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berührt.

Lösung. Fig. 130.

Verbinde den Mittelpunkt A des gegebenen Kreises mit dem gegebenen Punkte B durch eine Linie AB und beschreibe alsdenn aus dem gegebenen Punkte mit einem Halbmesser = der Entfernung dieses Punktes von dem in der gezogenen Linie gegebenen Punkte M der Kreisperipherie einen Kreis, so ist solches der verlangte.

Aufgabe 135.

Aus zwei gegebenen Punkten zwei Kreise zu beschreiben, die einander von außen berühren.

Lösung. Fig. 130.

Verbinde die gegebenen Punkte A und B durch eine Linie. Nehme in dieser willkührlich einen Punkt M, und beschreibe aus A mit dem Halbmesser AM und aus B mit dem Halbmesser BM Kreise, so berühren sich diese in M.

Aufgabe 136.

Aus zwei gegebenen Punkten zwei Kreise zu beschreiben, die einander von innen berühren.

Lösung. Fig. 131.

Ziehe vom Punkte A nach dem andern Punkte

B eine Linie AB und verlängere sie beliebig über B hinaus. Beschreibt man nun aus A mit einem beliebigen Halbmesser AC, so wie aus B mit BC Kreise, so berühren sich diese von innen im Punkte C.

Aufgabe 137.

Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen.

Lösung.

1. Vom Mittelpunkt C des gegebenen Kreises (Fig. 132.) ziehe man an den gegebenen Punkt A eine Linie AC und beschreibe mit ihr als Halbmesser einen zweiten concentrischen Kreis. Auf AC in B errichte man das Perpendikel BD; ziehe DC und an den Punkt E, wo diese Linie den gegebenen Kreis schneidet aus A die AE, so ist diese die verlangte Tangente.
2. Den Mittelpunkt C des gegebenen Kreises (Fig. 133.) und den gegebenen Punkt A verbinde durch eine Linie AC. Beschreibe über AC einen Kreis, so schneidet dieser den gegebenen in zwei Punkten, an welche von A aus die Tangenten AD und AE gezogen werden.

   $\angle$ AEC = $\angle$ ADC = R als Peripheriewinkel im Halbkreis.

Aufgabe 138.

Eine gemeinschaftliche Tangente an zwei in einer Ebene liegende Kreise zu ziehen.

Lösung.

a. Wenn die Tangente die Centrale in ihrer Verlängerung schneiden soll. Fig. 134.

Ueber der Centrale AB der gegebenen Kreise beschreibe einen Halbkreis AMB und lege in ihn vom Mittelpunkte A des größern Kreises die Sehne AC, welche dem Unterschied der Halbmesser der beiden gegebenen Kreise gleich ist. Verlängert man AC bis D und zieht BE || AD, so bezeichnen die Punkte D und E die Berührungspunkte der verlangten Tangente DE.

b. Wenn die Tangente die Centrale zwischen ihren Endpunkten schneiden soll. Fig. 135.

Ueber der Centrale AB beschreibe einen Halbkreis AMB, ziehe in ihm eine Sehne AC = der Summe der Halbmesser von beiden gegebenen Kreisen und ziehe BE || AC, so ist die Linie, welche durch D und E gezogen wird, die verlangte Tangente.

Denn ACB = R.

CD || BE.

CB || DE.

Demnach CDEB ein Rechteck.

Aufgabe 139.

Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der seinen Mittelpunkt in einer der

Lage nach gegebenen Linie hat und einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berührt.

Lösung. Fig. 136.

Aus dem Mittelpunkte C des gegebenen Kreises beschreibe einen zweiten concentrischen Kreis, dessen Halbmesser um den gegebenen Halbmesser des gesuchten Kreises größer ist als der des gegebenen. In den Punkten M und N wo dieser Kreis die gegebene Linie AB schneidet, oder sie in einem Punkte berührt, befindet sich der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Aufgabe 140.

Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Lösung. Fig. 137.

Aus dem gegebenen Punkte D beschreibe man mit dem gegebenen Halbmesser DP einen Kreis, so wie aus dem Mittelpunkte C des gegebenen Kreises einen zweiten concentrischen Kreis, dessen Halbmesser = der Summe der Halbmesser vom gegebenen und vom gesuchten Kreis. Der Punkt P sowohl als Q wo beide Kreise sich schneiden, ist der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises.

Wann ist die Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 141.

Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine der Lage nach gegebene Linie berührt.

Lösung. Fig. 138.

Errichte in einem beliebigen Punkte C der gegebenen Linie AB das Perpendikel CE = dem gegebenen Halbmesser des zu beschreibenden Kreises und ziehe durch E die MN || AB. Aus dem gegebenen Punkte D beschreibe mit einem Halbmesser DF = dem gegebenen Halbmesser einen Kreis, welcher die Linie MN in F schneidet und den Punkt F als Mittelpunkt des verlangten Kreises bezeichnet.

Aufgabe 142.

Innerhalb zweier Parallellinien einen Kreis zu beschreiben, der beide berührt und durch einen innerhalb denselben gegebenen Punkt geht.

Lösung. Fig. 139.

Errichte in irgend einem Punkte E der AB ein Perpendikel, welches die CD im Punkte F trifft. Halbire EF in G und ziehe aus G eine Linie MN, welche mit den beiden andern parallel ist. Liegt der gegebene Punkt P in dieser Linie, so mache man PH = EG und beschreibe aus H mit dem Halbmesser HP den verlangten Kreis.

Liegt aber der Punkt P' außerhalb der Linie

MN, so beschreibe man aus P' mit dem Halbmesser EG einen Kreis. Im Punkte H, wo dieser die MN schneidet, befindet sich der Mittelpunkt des mit dem Halbmesser P'H zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 143.

Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels einen Kreis zu beschreiben, welcher beide Schenkel berührt und zwar den einen in einem gegebenen Punkt.

Lösung. Fig. 140.

Errichte im gegebenen Punkte D des Schenkels AB ein Perpendikel; dasselbe thue auf dem andern Schenkel in dem Punkte E, der von der Spitze des Winkels gleich weit mit D absteht. Im Punkte F, wo beide Perpendikel sich schneiden, befindet sich der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

$\triangle ADF = \triangle AEF$.

Aufgabe 144.

Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der zwei der Lage nach gegebene Linien berührt.

Lösung. Fig. 141.

Mit jeder der gegebenen Linien AB, CD ziehe in einer Entfernung, welche dem gegebenen Halbmesser gleich ist, parallele Linien MN, RS. Der

Punkt P, wo beide sich schneiden, ist der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 145.

Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der die Schenkel eines Winkels berührt.

Lösung. Fig. 142.

Theile den gegebenen Winkel CAB durch die Linie AD in zwei gleiche Theile. Errichtet man nun auf dem Schenkel AB in einem beliebigen Punkte ein Perpendikel EF von der Größe des gegebenen Halbmessers und zieht durch F mit AB eine Parallele, so schneidet diese die AD in G und bezeichnet in diesem Durchschnittspunkt den Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 146.

Einen Kreis zu beschreiben, der zwei der Lage nach gegebene Linien berührt und durch einen zwischen ihnen liegenden Punkt geht.

Lösung. Fig. 143.

Verlängere die gegebenen Linien AB, CD bis sie sich im Punkte F schneiden. Aus F ziehe nach dem gegebenen Punkt E die FE nnd die FG, welche letztere den Winkel DFB halbirt. Aus einem beliebigen Punkte dieser Linie z. B. aus H fälle auf FD das Perpendikel HI und beschreibe mit diesem

als Halbmesser aus H einen Kreis, der die FE in den zwei Punkten K und L schneidet. Zieht man endlich HK, HL und mit diesen Linien aus dem Punkte E die ME || HK, NE || HL, so bezeichnen die Punkte M und N die Mittelpunkte von zwei Kreisen, deren Halbmesser ME, NE sind und welche beide der Forderung entsprechen.

$$FH : HL = FN : NE.$$
$$FH : HI = FN : QN.$$
$$\overline{}$$
$$HI : HL = QN : NE$$
$$QN = NP = NE.$$

Aufgabe 147.

Einen Kreis zu beschreiben, der zwei andere gegebene Kreise und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührt.

Lösung. Fig. 144.

Ziehe an den gegebenen Punkt C des Kreises um A einen Halbmesser CA und trage auf ihn (wo nöthig, verlängert) von C aus den Halbmesser des andern um B beschriebenen Kreises BD, so daß CE = BD. Ziehe BE und lege an sie im Punkte B den Winkel EBF = BEC. Im Punkte F, wo der Schenkel dieses Winkels den verlängerten Halbmesser AC schneidet, befindet sich der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Aufgabe 148.

Eine Linie und außer ihr zwei Punkte sind gegeben. Einen Kreis zu beschreiben, der die Linie berührt und durch die zwei Punkte geht.

Lösung. Fig. 145.

Ziehe durch die zwei gegebenen Punkte A und B eine Linie, welche verlängert die andere gegebene MN in C schneidet. Sucht man zu CA, CB die mittlere geometrische Proportionallinie und trägt sie von C nach D, errichtet hier so wie im Halbirungspunkt der Linie AB Perpendikel, so bezeichnet der Durchschnittspunkt O dieser den Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

$CD^2 = CA . CB.$

Aufgabe 149.

Ein Kreis und eine begrenzte Linie sind gegeben. Man soll einen zweiten Kreis verzeichnen, der ersteren berührt und die gegebene Linie als Sehne in sich aufnimmt.

Lösung. Fig. 146.

In dem mit dem Mittelpunkt K gegebenen Kreise nimm einen beliebigen Punkt C der Peripherie und beschreibe nach Aufgabe 114. durch diesen Punkt und die Punkte A und B der gegebenen Linie AB einen Kreis, der den gegebenen im Punkte D nochmals schneidet. Zieht man DC und verlängert

diese Linie bis sie die verlängerte AB in E trifft, und zieht von E die Tangente EF an den gegebenen Kreis, so bezeichnet F den Punkt, welcher mit A und B in einer Kreisperipherie liegt. Beschreibt man demnach nach der Aufgabe 114. einen Kreis, der durch F, A und B geht, so ist dieß der verlangte.

Denn $EA.\ EB = EC.\ ED = EF^2$, und demnach ist EF Tangente des Kreises, der durch A, B, F geht und den gegebenen Kreis in F berührt.

Aufgabe 150.

Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen Linie liegt, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine der Lage nach gegebene Linie berührt.

Lösung. Fig. 147.

Fälle aus dem gegebenen Punkte E auf die Linie, in welcher der Mittelpunkt liegt, das Perpendikel EF und verlängere dieses über die Linie hinaus um seine eigene Länge FG = EG, so ist unsere Aufgabe auf die Aufgabe 148. zurückgebracht, d. h. wir haben einen Kreis zu beschreiben, der durch die Punkte E und G geht und die Linie CD berührt.

Aufgabe 151.

Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden.

Lösung. Fig. 148.

1. Lege die zwei gegebenen Linien AC, BC in gerader Richtung an einander und beschreibe über der ganzen Linie AB einen Halbkreis. Das im Punkte C errichtete, von dem Kreisumfang begrenzte Perpendikel CF ist die gesuchte mittlere geometrische Proportionallinie.
2. Statt die gegebenen Linien aneinander zu legen, kann man sie auch aufeinander legen. Wenn z. B. die mittlere Proportionallinie zu den gegebenen Linien AB, AC zu finden ist, so schneide man die kleinere AC auf der größern AB ab. Beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in C ein Perpendikel CF und ziehe FA, so ist FA die mittlere Proportionallinie.

Aufgabe 152.

Auf einer gegebenen Linie in ihrem Endpunkte ein Perpendikel zu errichten.

Lösung. Fig. 149.

Ueber der gegebenen Linie AB auf der Seite wo das Perpendikel errichtet werden soll, wähle man einen Punkt C so, daß, wenn man um C mit dem Halbmesser AC einen Kreis beschreibt, dieser die Linie AB in einem zweiten Punkte D schneidet. Zieht man durch D und C eine Linie bis sie die Peripherie in E schneidet, so hat man blos von E

nach A eine Linie AE zu ziehen und das Verlangte ist geschehen.

Aufgabe 153.

Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt zu nehmen, welcher einen gegebenen Winkel faßt.

Lösung. Fig. 150.

An einen beliebigen Punkt A des gegebenen Kreises lege die Tangente Tt; und an sie im Punkte A den Winkel BAT = dem gegebenen Winkel x, so ist AB die Sehne des verlangten Kreisabschnittes AMB, der den gegebenen Winkel AMB = x faßt.

Aufgabe 154.

Auf einer gegebenen Linie einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel faßt.

Lösung. Fig. 150.

An die gegebene Linie AB lege im Punkte A den Winkel BAT = dem gegebenen Winkel x. In dem Punkte A auf AT, so wie in dem Halbirungspunkte D der AB errichte Perpendikel; wo diese sich schneiden, befindet sich der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Punkte A und B geht und von dem AB ein Stück AMB abschneidet, welches den gegebenen Winkel AMB = x faßt.

Aufgabe 155.

In einem gegebenen Kreis ein Dreieck zu be-

schreiben, das mit einem andern gegebenen gleiche Winkel hat.

Lösung. Fig. 151.

An irgend einen Punkt z. B. D des Kreises ziehe die Tangente Tt. Legt man nun an D die Winkel EDT = CAB, FDt = BCA und zieht EF, so ist DEF das verlangte Dreieck.

Aufgabe 156.

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches mit einem andern gegebenen gleiche Winkel hat.

Lösung. Fig. 152.

Verlängere eine beliebige Seite z. B. AB des Dreiecks ABC zu beiden Seiten nach D und E, so bekommt man die Aussenwinkel CAD, CBE. Zieht man nun einen beliebigen Halbmesser MN des gegebenen Kreises, legt an MN in M den Winkel NMO = CAD, und NMP = CBE, und zieht endlich durch die Punkte N, O, P, Tangenten an den Kreis, so schneiden sich diese und bilden das verlangte Dreieck QRS.

Aufgabe 157.

In und um einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 153.

Trage wie Aufgabe 125 den Halbmesser des Kreises

sechsmal in der Peripherie desselben herum, so daß dieselbe in den Punkten A, B, C, D, E, F geschnitten wird. Verbindet man die Punkte A und C, C und E, E und A durch Linien, so bilden diese innerhalb des Kreises ein gleichseitiges Dreieck.

Zieht man durch die Ecken dieses Dreiecks Parallelen mit den gegenüberliegenden Seiten, so erhält man das gleichseitige Dreieck GHI um den gegebenen Kreis.

Aufgabe 158.

Einen Kreis zu beschreiben, in welchem zwei gegebene Sehnen Bogen abschneiden, von welchen der eine doppelt so groß als der andere ist.

Lösung. Fig. 154.

Auf der größeren gegebenen Sehne AB beschreibe mit der kleinen AC = BC ein gleichschenkliges Dreieck ABC. Beschreibt man um solches nach Aufgabe 118 einen Kreis, so ist solches der verlangte.

Aufgabe 159.

In einem gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Größe zu ziehen, welche mit einer der Lage nach gegebenen Linie parallel läuft.

Lösung. Fig. 155.

Aus dem Mittelpunkte A des gegebenen Kreises fälle auf die gegebene Linie MN das Perpendikel

AB und trage die gegebene Sehne CD so auf die MN, daß CD in B halbirt wird. Zieht man aus den Punkten C und D Parallelen mit AB, so schneidet jede von diesen den Kreis in zwei Punkten, und wenn man die gegenüberstehenden durch Linien verbindet, so ist jede derselben die verlangte Sehne.

Ist die Sehne dem Durchmesser gleich, so berühren die Parallelen den Kreis.

Aufgabe 160.

Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehen.

Lösung. Fig. 156.

Ziehe vom Mittelpunkte A des gegebenen Kreises an den gegebenen Punkt C eine Linie AC und errichte auf ihr in C eine Senkrechte, welche nach beiden Seiten verlängert den Kreisumfang in B und D trifft, so ist BD die verlangte Sehne.

Aufgabe 161.

Auf eine gegebene Linie ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 157.

Halbire die gegebene Linie AB im Punkte C und beschreibe über sie einen Halbkreis. Errichte im Punkte C auf AB das Perpendikel CD und ziehe AD, BD, so ist ADB das verlangte Dreieck.

Aufgabe 162.

Aus einem in dem Umfang eines gegebenen Kreises bezeichneten Punkte eine Sehne in gegebener Entfernung vom Mittelpunkte zu ziehen.

Lösung. Fig. 156.

Beschreibe über dem Halbmesser AB des gegebenen Kreises ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen eine Kathete AC = der gegebenen Entfernung ist. Verlängert man die andere Kathete BC, bis sie den Kreisumfang in D trifft, so ist BD die verlangte Sehne.

Aufgabe 163.

In einer der Lage nach gegebenen Linie einen Punkt zu bestimmen, in welchem man zwei gegebene Punkte unter dem größt möglichsten Winkel sieht.

Lösung. Fig. 145.

Nach Aufgabe 143 beschreibe man einen Kreis der durch die zwei gegebenen Punkte A und B geht und die der Lage nach gegebene MN in D berührt, so ist dieser Berührungspunkt der gesuchte Punkt.

$\angle$ AEB = $\frac{1}{2}$ (Arc. AB — arc. mn.)

$\angle$ ADB = $\frac{1}{2}$ Arc. AB.

$\angle$ AFB = $\frac{1}{2}$ (Arc. AB — arc. rs.)

Aufgabe 164.

Einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus man drei der Lage nach gegebene Punkte unter gegebenen Winkeln sieht.

Lösung. Fig. 158.

Ziehe von dem gegebenen Punkte A nach dem zweiten gegebenen B und von diesem an den dritten C Linien. Nach Aufgabe 154 beschreibe über die Linie AB einen Kreis, dessen Peripheriewinkel auf der Sehne AB dem Winkel α gleich ist, unter welchem vom 4ten zu bestimmenden Punkte aus die Punkte A und B gesehen werden sollen. Dasselbe mache mit der Linie BC, über welche man einen zweiten Kreis beschreibt, dessen Peripheriewinkel über BC dem andern gegebenen Winkel β gleich ist. Wo beide Kreise sich schneiden, befindet sich der gesuchte Punkt P.

Aufgabe 165.

Es sind zwei Linien der Lage nach und die eine auch der Größe nach gegeben. Auf der andern zwei Punkte anzugeben, in welchen die erstere unter gegebenen gleichen Winkeln gesehen wird.

Lösung. Fig. 159.

An die der Größe nach gegebene Linie AB lege im Punkte A den gegebenen Winkel BAT; beschreibe einen Kreis, der AB als Sehne in sich aufnimmt, und dessen Tangente in A die Linie AT, so schneidet dieser die andere Linie CD in den Punkten M und N, und wenn man von diesen an die Endpunkte der AB Linien zieht, so hat man

$\angle$ ANB = $\angle$ AMB = $\angle$ BAT.

Wann ist die Aufgabe unmöglich?

Aufgabe 166.

Eine gegebene Linie so in zwei Theile zu theilen, daß die beiden Quadrate dieser Theile dem Quadrat einer gegebenen Linie gleich sind.

Lösung. Fig. 160.

An dem einen Endpunkte A der gegebenen Linie AB lege eine Linie AC unter einem halben rechten Winkel an und aus dem andern Endpunkte beschreibe einen Kreis, der die gegebene Linie DB = FB zum Halbmesser hat. Aus den Punkten D und F wo dieser Kreis die BC schneidet, fälle auf AB die Perpendikel DE, FG, so ist in jedem der Punkte G und E die Linie AB auf die verlangte Weise getheilt.

Denn $AE = ED$.

$$DB^2 = EB^2 + DE^2$$

$$DB^2 = EB^2 + AE^2.$$

Aufgabe 167.

Eine gegebene Linie in zwei Theile so zu theilen, daß das Rechteck aus diesen dem Quadrate einer gegebenen Linie gleich ist.

Lösung. Fig. 161.

Ueber die gegebene Linie AB beschreibe einen Halbkreis, auf dessen Durchmesser man in einem beliebigen Punkte ein Perpendikel CD gleich der gegebenen Seite des Quadrats errichtet. Zieht man durch D eine Linie mit AB parallel, so schneidet

diese den Kreisumfang in zwei Punkten; fällt man von diesen Perpendikel auf AB, so schneidet jeder von diesen die gegebene Linie in G und H auf die verlangte Weise.

Aufgabe 168.

Eine in einem Punkte willkührlich getheilte Linie in einem andern zweiten Punkte nochmals so zu theilen, daß das Quadrat der Entfernung des ersten Punktes vom Anfangspunkt der getheilten Linie sich zum Quadrat der Entfernung des zweiten Punktes verhält, wie dasselbe Quadrat zum Quadrat der ganzen Linie.

Lösung. Fig. 148.

Beschreibe über der in C getheilten Linie AB einen Halbkreis und verzeichne zu AC, AB die mittlere geometrische Proportionallinie AF. Trägt man diese auf AB nach AD, so ist D der verlangte Punkt, in welchem die Linie nochmals zu theilen ist.

$$AC : AD = AD : AB.$$
$$AC^2 : AD^2 = AD^2 : AB^2.$$

Aufgabe 169.

An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, die einen bekannten Winkel einschließen.

Lösung. Fig. 162.

Ziehe die eine Tangente TM beliebig an den Kreis und vom Berührungspunkte M aus nach dem Mittelpunkt C des gegebenen Kreises den Halbmesser

MC. Legt man an diesen im Punkte C einen Winkel, der den gegebenen x zu 2 R ergänzt, so daß MCD = 2 R — x und zieht an den Punkt D eine Tangente DT, so schließt diese mit der MT den gegebenen Winkel ein.

∠ M ✣ D = 2 R.
∠ C ✣ x = 2 R.

Aufgabe 170.

An einen gegebenen Kreis eine Tangente so zu ziehen, daß sie mit einer der Lage nach gegebenen Linie einen gegebenen Winkel bildet.

Lösung. Fig. 163.

Aus dem Mittelpunkte C des gegebenen Kreises fälle auf die gegebene Linie AB das Perpendikel CD. Lege an CD im Punkte C den gegebenen Winkel x und ziehe an den Punkt E, wo dessen zweiter Schenkel den Kreis trifft, die Tangente TE, so ist solche die verlangte.

△ CEm ∾ △ m TD.
∠ C = ∠ m TD.

Wie ist der Beweis zu führen, wenn TE die CD nicht schneidet?

Aufgabe 171.

Ein Kreis und außerhalb desselben ein Punkt ist gegeben. Man soll durch denselben eine Linie legen, auf welcher sich eine Sehne dieses Kreises von gegebener Länge abschneidet.

Lösung. Fig. 164.

Lege beliebig in den gegebenen Kreis ABM eine Sehne AB von der gegebenen Länge. Aus dem Mittelpunkte C fälle auf sie das Perpendikel CG und beschreibe mit diesem aus C einen concentrischen Kreis. Construirt man an diesen vom gegebenen Punkte P aus eine Tangente, so giebt diese, gehörig verlängert, die verlangte Linie, d. h. man hat EF = AB.

Aufgabe 172.

In dem Umfang eines Kreises einen Punkt zu bestimmen, daß die Entfernungen desselben von zwei andern gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniß haben.

Lösung. Fig. 165.

Verbinde die zwei gegebenen Punkte A und B durch eine Linie und theile diese in C in dem gegebenen Verhältniße nach Aufgabe 98, so daß z. B. AC : CB = 3 : 2. Ferner halbire man den Bogen AB in D und ziehe aus D durch C eine Linie, welche den Kreisumfang in E trifft, so ist der Punkt E der gesuchte, und man hat, wenn man EA, EB zieht

EA : EB = 3 : 2.

Da ∠ AED = ∠ DEB, so

AE : BE = AC : CB.

= 3 : 2.

Aufgabe 173.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß als ein gegebenes ist.

Lösung. Fig. 157.

Ueber der Seite AB des gegebenen Quadrats beschreibe einen Halbkreis; errichte im Mittelpunkt C des Durchmessers AB das Perpendikel CD und ziehe AD, BD, so ist das Quadrat von jeder dieser Linien die Hälfte des Quadrats von AB.

Aufgabe 174.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches dem Unterschied zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Lösung. Fig. 166.

Ueber der Seite AB des gegebenen größeren Quadrats beschreibe einen Halbkreis; lege in diesem als Sehne die Seite AC des gegebenen kleineren Quadrats und ziehe CB, so ist das Quadrat dieser Linie gleich dem Unterschied der Quadrate von AB und AC, d. i.

$$CB^2 = AB^2 - AC^2.$$

Aufgabe 175.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches beliebig mal größer ist als ein gegebenes.

Lösung. Fig. 167.

Soll z. B. ein Quadrat beschrieben werden, welches 5mal größer ist als das gegebene Quadrat der

Linie AB, so schneide man auf einer beliebigen Linie 5mal die Linie AB ab, so daß AC = 5 AB. Beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte im Punkte B ein Perpendikel und ziehe die Sehne AD, so ist das Quadrat, welches man auf die Linie AD beschreibt, fünfmal so groß als das Quadrat über der Linie AB.

Denn AB : AD = AD : AC

AB : AD = AD : 5 AB.

$\overline{AD}^2 = 5\ \overline{AB}^2$.

Aufgabe 176.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches einen oder mehrere beliebige Theile eines gegebenen Quadrats enthält.

Lösung. Fig. 168.

Soll z. B. ein Quadrat beschrieben werden, welches $\frac{3}{5}$ von dem Quadrat der Linie AB ist, so theile die Linie AB in 5 gleiche Theile AC, CD ꝛc. ꝛc. beschreibe über sie einen Halbkreis und errichte im dritten Theilungspunkte E das Perpendikel EK. Zieht man die Linie AK, so ist das Quadrat dieser $\frac{3}{5}$ von dem Quadrate der AB.

Denn AE : AK = AK : AB.

$\frac{3}{5}$ AB : AK = AK : AB.

$AK^2 = \frac{3}{5}\ AB^2$.

Aufgabe 177.

In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu

beschreiben, der sowohl den Bogen als die beiden Halbmesser berührt.

Lösung. Fig. 169.

Man halbire den rechten Winkel ABC durch die Linie BD und ziehe durch D, wo diese den Kreisbogen trifft, eine Tangente DE an den Kreis, welche den verlängerten Halbmesser AB in E trifft. Macht man BF = AE und errichtet in F ein Perpendikel, so schneidet dieses die BD in G, und der Punkt G bezeichnet den Mittelpunkt des gesuchten, mit dem Halbmesser GD = GF zu beschreibenden Kreises.

$\triangle$ GFB = $\triangle$ GHB.

GF = GH.

BD = BA = EF = ED.

$\angle$ EDF = $\angle$ EFD.

$\angle$ GDF = $\angle$ GFD.

DG = GF = GH.

Aufgabe 178.

In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, dessen eine Spitze in einer Ecke, die beiden andern aber in den Seiten des Quadrats liegen.

Lösung. Fig. 170.

Aus der bezeichnenden Ecke A des Quadrats ABCD beschreibe den Quadranten BD, und trage in denselben von D aus nach E den Halbmesser AD,

mit dem er beschrieben wurde. Halbirt man den übrigen Bogen BE des Quadranten in F, macht DK = FB und zieht durch K und F die AH, AG bis sie die Seiten des Quadrats treffen, so bezeichnen die Punkte A, H, G die Spitzen des verlangten Dreiecks.

$\angle$ DAE = $\frac{2}{3}$ R.

$\angle$ EAF = FAB = $\frac{1}{6}$ R.

$\angle$ HAG = $\frac{2}{3}$ R.

AH = AG.

$\angle$ AHG = AGH.

Aufgabe 179.

Ein Quadrat zu zeichnen, wenn der Unterschied zwischen der Diagonale und Seite gegeben ist.

Lösung. Fig. 171.

Beschreibe ein Quadrat ABCD, dessen Diagonale dem gegebenen Unterschiede gleich ist. Mache CE = CB und ziehe EB. Zieht man nun aus C eine Parallele mit EB, welche die verlängerte AB in F trifft, so ist AF die Seite des verlangten Quadrats AFGH.

$\triangle$ CFG $\sim$ CEB.

GC = GF.

Aufgabe 180.

Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Grundlinie, Höhe und der Perpendikel aus einem der Endpunkte der

Grundlinie auf die gegenüberstehende Seite gegeben ist.

Lösung. Fig. 172.

Auf der gegebenen Grundlinie AB errichte in irgend einem Punkte ein Perpendikel AC = der gegebenen Höhe und ziehe durch C die MN || AB. Beschreibt man nun aus A mit dem Halbmesser AD = der gegebenen Länge des Perpendikels einen Kreisbogen und zieht an diesen aus B eine Tangente, welche die MN in F trifft und endlich die Linie FA, so ist BFA das verlangte Dreieck.

Aufgabe 181.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn eine Seite und die Perpendikel aus den Endpunkten dieser Seite auf die gegenüberstehenden Seiten gegeben sind.

Lösung. Fig. 173.

Beschreibe aus den Endpunkten A und B der gegebenen Seite AB mit den Halbmessern BM, AN, welche den entsprechenden Perpendikeln gleich sind, Kreisbögen, und ziehe an diese von den Punkten A und B Tangenten. Diese schneiden sich in C und ABC ist das verlangte Dreieck.

Aufgabe 182.

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und der der größern Seite gegenüberstehende Winkel bekannt ist.

Lösung. Fig. 174.

In der Mitte der größern Seite AB errichte man eine senkrechte, in welcher man den Punkt E so bestimmt, daß ∠ DEA = dem gegebenen Winkel x. Aus E beschreibe man einen Kreis, der durch die Punkte A und B geht. Legt man nun aus einem dieser Punkte die kleinere gegebene Seite AC als Sehne in den Kreis und zieht von dem Punkte C an den andern Endpunkt der größern Linie die CB, so erhält man das verlangte Dreieck ACB.

Aufgabe 183.

Ein Dreieck zu beschreiben, wenn dessen Grundlinie und der ihr gegenüberstehende Winkel, so wie die Summe der beiden andern Seiten gegeben ist.

Lösung. Fig. 175.

An den einen Endpunkt A der Seite AB, welche die gegebene Summe der beiden Seiten ist, lege einen Winkel, gleich dem halben gegebenen, und beschreibe aus dem andern Endpunkte B der Seite AB mit der gegebenen Grundlinie als Halbmesser einen Kreis, der den verlängerten Schenkel dieses Winkels in C und D schneidet. Legt man an diesen Schenkel in den Punkten C und D Winkel, welche dem halben gegebenen gleich sind ACE = ADF =

DAF, und zieht man CB, DB, so entspricht sowohl $\triangle$ ECB als $\triangle$ DFB der Forderung.

Denn AE = EC; BE + EC = AB.

$\angle$ CEB = DFB = 2 CAB.

FA = FD; BF + FD = AB.

Aufgabe 184.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben so daß jeder Winkel an der Grundlinie das Doppelte des Winkels an der Spitze ist.

Lösung. Fig. 176.

Man wähle eine beliebige Linie AB zu einem Schenkel des verlangten Dreiecks und theile sie nach Aufgabe 105. in C nach dem äußern und mittleren Verhältniße. Beschreibt man nun ein Dreieck, dessen Schenkel BD = AB und welches den größern Abschnitt CB der AB zur Grundlinie hat, so ist das Verlangte geschehen.

AC : CB = CB : AB

AC : AD = AD : AB

$\triangle$ ACD ∾ $\triangle$ ABD.

$\angle$ CDA = $\angle$ B.

AD = CD = CB.

$\angle$ CDB = $\angle$ B.

$\angle$ ADB = 2 $\angle$ B.

Aufgabe 185.

Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn dessen Grund-

linie, Höhe und der der Grundlinie gegenüberliegende Winkel gegeben ist.

Lösung. Fig. 177.

In dem Mittelpunkte C der gegebenen Grundlinie AB errichte das Perpendikel CD von der gegebenen Höhe des Dreiecks. Lege an die AB den Winkel BAF = dem gegebenen Winkel x und ziehe AG so, daß FAG = R. Beschreibt man nun aus G mit dem Halbmesser AG = BG einen Kreis und zieht durch D die HK || AB, so bezeichnet jeder der Punkte H, K die Spitze des verlangten Dreiecks HAB oder KAB.

∠ BAF = AHB = AKB.

Aufgabe 186.

Mit einer gegebenen Kathete ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, so daß ein aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefälltes Perpendikel eine gegebene Linie auf derselben abschneide.

Lösung. Fig. 178.

Beschreibe über der gegebenen Kathete AB einen Halbkreis und lege in demselben vom Punkte B aus als Sehne die gegebene abzuschneidende Linie BC. Verlängert man diese Sehne bis sie das im andern Endpunkte der AB errichtete Perpen-

dikel in D schneidet, so ist ADB das verlangte Dreieck.

Aufgabe 187.

Auf einer gegebenen Linie als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Lösung. Fig. 179.

Auf der gegebenen Linie AB trage die Seite des gegebenen Quadrats zweimal auf und beschreibe über dieser abgeschnittenen Linie AC einen Halbkreis. Errichtet man in der Mitte von AC einen Perpendikel DE und zieht AE, CE so ist das Dreieck AEC dem gegebenen Quadrate gleich und rechtwinklig.

Nach Aufgabe 57. verwandle man dieses Dreieck in das △ AFB von der gegebenen Grundlinie AB, und damit dieses rechtwinklig werde, beschreibe man über AB einen Halbkreis, ziehe durch die Spitze F des Dreiecks AFB die GK || AB, so erhält man, wenn man noch AG, AK, BG, BK zieht, zwei Dreiecke AGB, AKB, von denen jedes der Aufgabe genügt.

Aufgabe 188.

Ueber die Seite eines regulären Vielecks von gerader oder ungerader Seitenzahl ein reguläres Vieleck von doppelter Seitenzahl zu zeichnen.

Lösung. Fig. 180.

Man beschreibe um das reguläre Vieleck einen Kreis und errichte auf der Mitte einer Seite des Vielecks ein Perpendikel bis dasselbe den Kreisumfang trifft. Aus dem Punkte wo dieses geschieht beschreibe man einen Kreis der die gewählte Seite als Sehne in sich aufnimmt, so wird man solche im neuen Kreis doppelt so oft herumtragen können, als in dem um das gegebene Vieleck beschriebenen.

Es sey z. B. AB die Seite des regulären Sechsecks ABCDEF. Halbirt man AB in G und zieht von G durch H die GI perpendikulär auf AB und beschreibt aus I mit dem Halbmesser IA = IB einen Kreis, so ist AB die Seite des einzubeschreibenden Zwölfecks.

$\angle$ AIB = $\frac{1}{2}$ AHB.

Aufgabe 189.

Ein dem gegebenen Rechtecke gleiches Quadrat zu beschreiben.

Lösung.

1. Verlängere die Seite AB (Fig. 181.) des gegebenen Rechtecks ABCD, bis BE = BD. Beschreibt man über AE einen Halbkreis und verlängert die Seite BD bis zum Punkte F in der Peripherie dieses Kreises, so ist FB die Seite des Quadrats, welches dem gegebenen Rechtecke gleich ist.

AB : FB = FB : BE

AB. BD = FB².

2. Auf der größern Seite AB des gegebenen Rechteckes ABCD (Fig. 182.) schneide man die kleinere AE = AC ab. Beschreibt man über AB einen Halbkreis, errichtet in E ein Perpendikel, welches diesen in F trifft und zieht AF, so ist AF die Seite des verlangten Quadrats.

AE : AF = AF : AB.

AB. AC = AF².

3. Auf der größern Seite AB des gegebenen Rechteckes (Fig. 183.) schneide man die kleinere AC ab und beschreibe über dem Reste CB einen Kreis. Zieht man von A aus an diesen eine Tangente AT, so ist diese die Seite des dem gegebenen Rechtecke gleichen Quadrats.

AC : AT = AT : AB

AC. AB = AT².

Aufgabe 190.

Ein Quadrat zu beschreiben, welches einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist.

Lösung.

Verwandle die gegebene Figur nach Aufgabe 62. in ein Dreieck, dieses nach Aufgabe 60. in ein Rechteck und letzteres nach der vorigen Aufgabe in ein Quadrat, so ist solches der gegebenen geradlinigen Figur gleich.

Aufgabe 191.

Einen Mond zu bilden, der einem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecke gleich ist.

Lösung. Fig. 184.

Aus der Spitze A des rechten Winkels vom gegebenen Dreiecke ABC beschreibe mit AB = AC einen Halbkreis und einen zweiten Halbkreis über der Hypotenuse BC, so schneiden sich beide in B und C und der Mond BMC = △ ACB.

Kleine Halbkreis : Größeren Halbkreis = $BC^2 : BD^2$
$= 2 AC^2 : 4 AC^2$
$= 1 : 2.$

Halbkreis BMC = Quadrant ABC.

Mond BMC = △ ABC.

Aufgabe 192.

Einen Kreis zu beschreiben, dessen Umfang um eine gegebene Zahl größer ist als der eines andern.

Lösung. Fig. 185.

Beschreibe einen Kreis mit einem Halbmesser der um die gegebene Zahl größer ist als der des gegebenen Kreises, so ist dieß der verlangte Kreis.

Soll z. B. ein Kreis beschrieben werden, dessen Umfang zweimal so groß ist als der des gegebenen Kreises AB, so beschreibe einen Kreis, dessen Halbmesser = 2 AC = DE ist ebenfalls zweimal so groß, und man hat den gesuchten.

Aufgabe 193.

Ein gegebenes Dreieck einem andern gegebenen ähnlich zu machen.

Lösung. Fig. 186.

Verwandle das Dreieck, welches dem andern ähnlich gemacht werden soll so, daß es einen Winkel mit diesem andern gleich hat.

Dieß sey geschehen und △ ADE soll dem △ ABC ähnlich gemacht werden. Durch die Punkte E und D ziehe FE || DG || CB. Sucht man zu AE und AG die mittlere geometrische Proportionallinie AM, trägt diese auf AB, so daß AH = AM und zieht HK || CB, so ist KAH das verlangte Dreieck.

Denn AG : AH = AH : AE.
AG : AH = AD : AK.

AH : AE = AD : AK.
DH || EK.
△ EDH = DKH.
△ ADH + EDH = ADH + DKH.
△ ADE = △ AKH.

Aufgabe 194.

Ein Viereck zu verzeichnen, von dem zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel und die zwei Winkel, welche an der gegenüberliegenden Ecke die Diagonale mit den Seiten bildet, gegeben sind.

Lösung. Fig. 187.

Lege die zwei gegebenen Seiten AB, BC unter

dem gegebenen Winkel an einander, so daß man, wenn man noch AC zieht, das Dreieck ABC erhält. An den Punkt A lege den Winkel CAD = dem einen der gegebenen β und an den Punkt C den Winkel ACD = dem anderen gegebenen α. Durch die Punkte A, C und den Punkt D, wo die Schenkel dieser Winkel sich schneiden, beschreibe einen Kreis und verlängere DB bis sie die Peripherie in E trifft. Zieht man EA, EC, so ist ABCE das verlangte Viereck.

$\angle$ CAD = β = CEB.

$\angle$ ACD = α = AEB.

Aufgabe 195.

In einen gegebenen Kreis ein reguläres Fünfeck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 188.

Nach Aufgabe 184 beschreibe ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck ABC, wo der Winkel an der Spitze nur halb so groß ist als jeder der Winkel an der Grundlinie, und trage nach Aufgabe 156 ein diesem gleichwinkliges MNR in den gegebenen Kreis. Halbirt man die Winkel M, N, und zieht aus den Punkten Q, P wo die Halbirungslinien den Kreisumfang treffen, die Linien QN, QR, RP, PM so hat man das verlangte Fünfeck.

Aufgabe 196.

In einen gegebenen Kreis ein reguläres Zeheneck zu beschreiben.

Lösung. Fig. 189.

Theile nach Aufgabe 105. den Halbmesser AB

des gegebenen Kreises in dem Punkte C nach dem äußern und mittlern Verhältniß, so ist der größere Theil AC die Seite des regulären Zehenecks, welches in den Kreis beschrieben werden kann.

Nach Aufgabe 184. ist der Winkel BAD

$$= \frac{1}{2} \angle ABD = \frac{2\ R}{5} = \frac{4\ R.}{10}$$

wie die Aufgabe verlangt.

Aufgabe 197.

Um einen gegebenen Kreis im Viereck zu zeichnen, wo die gegenüberstehenden Winkel 2 R ausmachen, welches also in einem Kreis liegt.

Lösung. Fig. 190.

In den gegebenen Kreis beschreibe man ein beliebiges Viereck ABCD und fälle auf dessen Seiten vom Mittelpunkte E aus Perpendikel, welche verlängert den Kreisumfang in den Punkten F, G, H, K treffen. Zieht man durch diese Punkte Tangenten an den Kreis, so bilden diese, gehörig verlängert, das verlangte Viereck LMNO.

Die $\angle$ CDA + CBA = 2 R.
Aber $\angle$ HOK = CDA.
$\angle$ GMF = CBA.
Demnach $\angle$ HOK + GMF = 2 R.

Aufgabe 198.

Zwei gegebene Kreise in einen zu verwandeln.

Lösung. Fig. 191.

Man lege die Halbmesser AB, AC der gegebenen Kreise rechtwinklig aneinander und ziehe die

Hypotenuse BC, so ist diese Linie der Halbmesser des neuen Kreises, der so groß als die beiden gegebenen Kreise ist.

Aufgabe 199.

Einen Kreis in eine ringförmige oder mondähnliche Figur zu verwandeln.

Lösung. Fig. 191.

Ziehe einen Halbmesser AB des gegebenen Kreises und errichte auf dessen Endpunkte A die Tangente AC = AB. Beschreibt man nun mit der Linie BC als Halbmesser einen Kreis um den gegebenen, so ist die zwischen beiden enthaltene ringförmige Figur dem gegebenen Kreise gleich.

Rückt man den gegebenen Kreis an die Peripherie des also umschriebenen, so entsteht eine mondähnliche Fläche, welche gleichfalls dem gegebenen Kreise gleich ist.

Aufgabe 200.

Einen gegebenen Halbkreis in einen ganzen Kreis zu verwandeln.

Lösung. Fig. 184.

Auf der Mitte A des Durchmessers des gegebenen Halbkreises BDC errichte das Perpendikel AC und ziehe die Sehne BC. Beschreibt man über diese als Durchmesser einen Kreis ABMC, so ist dieses der verlangte.

Aufgabe 201.

Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das zwei gegebene Winkel hat.

Lösung.

Diese Aufgabe kommt ganz auf die Aufgabe 193

zurück, ein gegebenes Dreieck einem andern ähnlich zu machen.

Aufgabe 202.

Ein Quadrat in ein Rechteck von bestimmtem Umfang zu verwandeln.

Lösung. Fig. 192.

Mache die Linie AB so groß als die Hälfte des gegebenen Umfangs und beschreibe über ihr einen Halbkreis. Errichte auf AB im Punkte A das Perpendikel AC = der Seite des gegebenen Quadrats, ziehe CD || AB und fälle aus D auf AB das Perpendikel DE, so sind die Theile AE, EB der Linie AB die anstoßenden Seiten des verlangten Rechteckes.

$$DE^2 = AE. EB.$$

$$AE + EB = AB.$$

$$2 (AE + EB) = 2 AB.$$

Eben so kann man jedes Parallelogramm, Dreieck rc. in ein Rechteck von gegebenem Umfang verwandeln, weil jede dieser Figuren sich in ein Quadrat verwandeln läßt.

Aufgabe 203.

Ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Lösung. Fig. 193.

Verwandle zuerst das gegebene Dreieck in das gleichschenklige ABC. Ueber der Grundlinie AB dieses beschreibe das gleichseitige Dreieck ADB und ziehe durch dessen Spitze D und die Spitze C des gleichschenkligen Dreiecks die Linie DE.

Sucht man nun zu DE und EC die mittlere

geometrische Proportionallinie EF, trägt solche vom Punkte E aus auf die ED, so daß EG = EF und zieht man aus G die GH || AD, GI || DB, so ist GHI das verlangte Dreieck.

Denn ED : EG = EG : EC.
ED : EG = EB : EI.
___
EG : EC = EB : EI
EG : EI = EC . EB
△ EGI = △ ECB.
Eben so △ EGH = △ ECA
___
△ GHI = △ ABC.

Aufgabe 204.

Ein gegebenes Dreieck in ein Paralleltrapez zu verwandeln, das eine Seite und die zwei an dieser Seite anliegenden Winkel von gegebener Größe hat.

Lösung. Fig. 194.

Man verwandele das gegebene Dreieck in ein anderes, welches die gegebene Seite des Paralleltrapezes und einen ihr anliegenden Winkel enthält.

Es sey dieß geschehen und das so erhaltene Dreieck sey ABC, wo AB die gegebene Seite und CAB der gegebene Winkel des Trapezes ist. Trage an den andern Endpunkt B der AB den zweiten ihr anliegenden Winkel DBA und verlängere rückwärts dessen Schenkel DB bis er die verlängerte CA in F schneidet. Sucht man zu AF und CF die mittlere geometrische Proportionallinie FG und zieht GH || AB, so ist AGHB das verlangte Paralleltrapez.

FA : FG = FG : FC.
FA : FG = FB : FH.
___
FG : FC = FB : FH.

GB || CH.

△ GCB = GHB.

△ GCK = △ BKH.

Aufgabe 205.

Ein Quadrat in ein solches Rechteck zu verwandeln, wo der Unterschied zweier anstoßenden Seiten desselben gegeben ist.

Lösung. Fig. 195.

An die Seite AB des gegebenen Quadrats lege unter einem rechten Winkel die AC = der gegebenen Differenz. Halbire AC in D und beschreibe aus D über AC einen Kreis. Zieht man von B durch D eine Sekante dieses Kreises, so sind BE und BF die verlangten Seiten des Rechteckes.

Aufgabe 206.

Ein Polygon zu beschreiben, das einem gegebenen Polygon ähnlich ist und einen bestimmten Inhalt hat.

Lösung. Fig. 196.

Man verwandle das gegebene Polygon ABCDE in ein Dreieck AEF mit dem Winkel A und der Seite AE. Verlängert man die Seiten AB, AE, so läßt sich leicht zwischen diesen Schenkeln eine Linie ziehen, durch welche ein Dreieck von dem bestimmten Inhalte des Polygons begrenzt wird. Nach Aufgabe 193 verwandle man dieses Dreieck in ein anderes AGH, welches dem △ AEF ähnlich ist, und beschreibe auf dessen Seite AH nach Aufgabe 107 ein dem gegebenen Polygone ähnliches Polygon AHIKL, so ist solches das verlangte.

Die Seite AH des neuen Polygons findet man

auch, wenn man den Inhalt beider Figuren als Quadrate von gegebenen Seiten darstellt und zu diesen beiden Seiten und der der AH homologen AE die vierte geometrische Proportionallinie sucht.

Aufgabe 207.

Einen beliebigen Theil eines gegebenen Polygons wieder als ein Polygon darzustellen, welches dem gegebenen ähnlich ist.

Lösung. Fig. 197.

Es sey z. B. der fünfte Theil des Polygons ABCDE als ein solches Polygon darzustellen, so theile man eine beliebige Seite des gegebenen Polygons z. B. AB in 5 gleiche Theile und suche zu der ganzen Linie AB und einem dieser Theile $AF = \frac{1}{5} AB$ die mittlere geometrische Proportionallinie AG. Diese Linie ist die der AB entsprechende im gesuchten Polygon. Macht man daher $AH = AG$, zieht die Diagonalen AC, AD, und $HI \parallel BC$, $IK \parallel CD$, $KL \parallel DE$, so ist AHIKL das verlangte Polygon.

$$\begin{aligned} p : P &= AH^2 : AB^2 \\ &= AB . AF : AB^2 \\ &= AF : AB \\ &= 1 : 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 208.

Mehrere ähnliche Figuren in eine einzige zu verwandeln, welche allen zusammen genommen gleich und einer jeden ähnlich ist.

Lösung.

An eine beliebige Seite der ersten Figur lege man unter einem rechten Winkel die ihr homologe

Seite aus der zweiten und ziehe die Hypotenuse. An diese Hypotenuse lege man unter einem rechten Winkel die den ersteren Seiten homologe Seite aus der dritten Figur und ziehe die Hypotenuse. So fährt man fort bis man alle homologen Seiten rechtwinklig angelegt hat. Die letzte Hypotenuse ist die homologe Seite der Figur, welche allen zusammen gleich ist.

Nach Aufgabe 107. kann auf ihr die ähnliche Figur beschrieben werden.

Aufgabe 209.

Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, das einem gegebenen ähnlich ist.

Lösung. Fig. 198.

Wenn das zu verwandelnde Parallelogramm noch nicht mit dem zweiten gegebenen gleichwinklig ist, so mache man vor Allem dieses, und man hat dem gegebenen Parallelogramme ABCD das Parallelogramm EFGH den Seiten nach ähnlich zu machen.

Man ziehe die Diagonale AC, mache $\angle$ IEF $= \angle$ CAB und vollende das Parallelogramm EFIK. Sucht man nun zu EH, EK die mittlere geometrische Proportionallinie EL und zieht LM $\|$ IK, MN $\|$ FI, so ist $\square$ ENML $\sim$ $\square$ ABCD $=$ $\square$ EFGH.

Denn zieht man OQ, so

$\square$ KP $=$ $\square$ PF

$\square$ KO $=$ $\square$ HF ; $\square$ HO : $\square$ LN $=$ HE : KE

$\square$ HO : $\square$ KO $=$ $\square$ HO : $\square$ LN

$\square$ KO $=$ $\square$ LN. $=$ HF.

Aufgabe 210.

Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels durch die kleinmöglichste Linie ein Dreieck von einem gegebenen Inhalt abzuschneiden.

Lösung. Fig. 199.

Beschreibe zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels BAC ein beliebiges Dreieck ADE von dem gegebenen Inhalte und verwandele solches nach Aufgabe 193 in ein anderes APQ, welches einem auf den gegebenen Schenkeln des Winkels gleichschenklig abgeschnittenen AMN ähnlich ist.

Aufgabe 211.

Ein Dreieck so zu halbiren, daß die Halbirungslinie mit einer Seite desselben parallel läuft.

Lösung. Fig. 200.

Man halbire die Seite AB des gegebenen Dreiecks ABC in D und suche zu AD, AB die mittlere geometrische Proportionallinie AE. Trägt man diese auf AB, so daß AF = AE und zieht aus F die FG || CB, so ist durch FG das Dreieck halbirt.

Man kann auch die AE auf AB so tragen, daß BH = AE. Zieht man alsdann HK || AC, so ist auch dadurch das Verlangte geschehen.

$$\triangle AFG : ABC = AF^2 : AB^2$$
$$= \tfrac{1}{2} AB^2 : AB^2$$
$$= 1 : 2.$$

Aufgabe 212.

Ein Dreieck in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die theilenden Linien mit einer Seite desselben parallel laufen.

Lösung. Fig. 201.

Theile die Seite AB des gegebenen Dreiecks ABC in drei gleiche Theile AD, DE, EB und suche zu AD, AB so wie zu AE, AB die mittleren geometrischen Proportionallinien AF und AG. Macht man AH = AF, AK = AG und zieht aus H und K die HL und KM ∥ BC, so theilen diese Linien das Dreieck auf die verlangte Weise.

$$\triangle\ ALH : ACB = AH^2 : AB^2$$
$$= \tfrac{1}{3} AB^2 : AB^2$$
$$= 1 : 3. \text{ u. s. w.}$$

Auf gleiche Weise kann man ein Dreieck in jede beliebige Anzahl gleiche Theile theilen, wo die Theilungslinien mit einer bestimmten Seite des Dreiecks parallel laufen. Man theilt nämlich die der gegebenen Seite anliegende in die verlangte Anzahl gleiche Theile und verfährt dann wie oben.

Aufgabe 213.

Ein Dreieck durch zwei Linien, die mit einer gegebenen Seite desselben parallel laufen, in drei Theile zu theilen, die sich zu einander wie gegebene Zahlen verhalten.

Lösung. Fig. 202.

Die der gegebenen Seite BC anliegende AB des gegebenen Dreiecks ABC theile in so viel gleiche Theile als die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen Einheiten enthält. Die Theile sollen sich z. B. verhalten wie 3 : 4 : 5, so theile man AB in 3 + 4 + 5 = 12 gleiche Theile. Beschreibe alsdenn über AB einen Halbkreis und suche zu AD = 3 solchen gegebenen Theilen und AB die mittlere geometrische Pro-

portionallinie AF. Dieselbe suche man zu AG = 3 + 4 = 7 solchen Theilen und AB. Trägt man diese vom Punkte A auf die Linie AB, so daß AH = AF. AI = AM und zieht aus ihren Endpunkten Parallelen mit CB, so ist das Dreieck ABC durch die Linien HK, IL in dem gegebenen Verhältniße und auf die verlangte Art getheilt.

Aufgabe 214.

Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit zwei Seiten des Dreiecks parallel laufen.

Lösung. Fig. 203.

Aus der Spitze C des gegebenen Dreiecks ABC ziehe an die gegenüberstehende Seite die Linie CD so erhält man zwei Dreiecke ACD, BCD. Eines dieser Dreiecke, z. B. △ ACD theile man in die bestimmte Anzahl gleicher Theile, z. B. in drei, so daß die Theilungslinien EF, GH mit der Seite AC parallel laufen, und ziehe aus F und H die FI || HK || CB, so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 215.

Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit den drei Seiten des Dreiecks parallel laufen.

Lösung. Fig. 204.

Aus dem Punkte D, den man so viel wie möglich in der Mitte des gegebenen Dreiecks ABC wählt, ziehe man nach den Winkelspitzen die DA, DB, DC, so erhält man dadurch die Dreiecke ADB, BDC, CDA. Theilt man irgend eines derselben, z. B. △ ADB in die bestimmte Anzahl gleicher Theile, z. B. in drei,

so daß die Theilungslinien mit der dem Punkte D gegenüberstehenden Seite AB parallel laufen nach Aufgabe 212, und zieht man aus den Endpunkten E, F, G, H dieser Theilungslinien die EI || FK || AC und eben so die GI || HK || BC, so ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 216.

Ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl gleicher Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer Diagonale parallel laufen.

Lösung. Fig. 205.

Theile nach Aufgabe 212 das Dreieck ABC des gegebenen Parallelogramms ABCD in die Hälfte der Anzahl der gleichen Theile, in welche das ganze Parallelogramm getheilt werden soll, z. B. in drei, so daß die Theilungslinien mit AC parallel laufen, und mache dasselbe mit dem Dreieck ACD, so ist das Verlangte geschehen. Das Dreieck ACD wird aber dem Dreieck ABC gleichmäßig getheilt, wenn HC = AD, HK = DF, AI = CE, IL = EG gemacht wird und die Linien IH, LK gezogen werden.

Wie verfährt man, wenn das Parallelogramm in eine ungerade Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll?

Aufgabe 217.

Ein Paralleltrapez in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien mit den parallelen Seiten des Trapezes ebenfalls parallel laufen.

Lösung. Fig. 206.

Ueber der größeren AB der parallelen Seiten des Trapezes ABCD beschreibe einen Halbkreis; ziehe

DE || BC und beschreibe aus B mit dem Halbmesser BE einen Bogen, welcher den Halbkreis in F schneidet. Die Linie AG, welche auf AB durch das von dem Punkte F herabgefällte Perpendikel abgeschnitten wird, theile man in die gegebene Anzahl gleicher Theile, z. B. in drei, so daß AH = HI = IG und suche zu BI, AB so wie zu BH, AB die mittleren geometrischen Proportionallinien BL, BM. Zieht man aus den Punkten L, M Parallelen mit BC, so treffen diese die AD in N, T, und macht man NQ || TR || AB, so ist das Trapez auf die verlangte Weise getheilt.

$$\triangle NKQ : \triangle DCK = NQ^2 : CD^2.$$
$$= LB^2 : EB^2.$$
$$= BI : BG.$$
$$\triangle NKQ - \triangle DCK : \triangle DCK = BI - BG : BG$$
$$\text{Trapez } DNQC : \triangle DCK = GI : BG.$$
$$= \tfrac{1}{3} AG : BG.$$

Eben so hat man

$$\text{Trapez } DTRC : \triangle DCK = \tfrac{2}{3} AG : BG.$$
$$\text{Trapez } DABC : \triangle DCK = \tfrac{3}{3} AG : BG.$$

Demnach

$$\text{Trapez } DNQC : DTRC : DABC = \tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{3}$$
$$= 1 : 2 : 3.$$

Aufgabe 218.

Von einem gegebenen Rechteck einen beliebigen Theil so wegzunehmen, daß das Rechteck seine Aehnlichkeit beibehält.

Lösung. Fig. 207.

Wenn z. B. das gegebene Rechteck ABCD um den dritten Theil verkleinert werden soll, so schneide man von dessen größeren Seite AB den dritten Theil

BE ab und suche zu AB und AE die mittlere geometrische Proportionallinie AF. Macht man AG = AF, zieht die Diagonale AC und GH || AD, HK || AB, so ist AGHK das verlangte Rechteck.

Denn HG : BC = AH : AC.
HK : CD = AH : AC.

HG : BC = HK : CD und □ AGHK ∼ □ ABCD.

Ferner $AG = \sqrt{\frac{2}{3} AB^2}$

$$HG = \frac{BC \sqrt{\frac{2}{3} AB^2}}{AB}$$

$$AG \,.\, HG : AB \,.\, BC = \frac{BC \,.\, \frac{2}{3} AB^2}{AB} : AB \,.\, BC$$

$$= \frac{2}{3} : 1.$$

Aufgabe 219.

Einen gegebenen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien ebenfalls Kreislinien sind, die in einem bestimmten Punkte den Kreis berühren.

Lösung. Fig. 208.

Ziehe von dem gegebenen Punkte A an den Mittelpunkt C des Kreises den Halbmesser AC und theile diesen in die verlangte Anzahl gleicher Theile z. B. in drei, so daß AB = BD = DC. Suche zu AC, AB, so wie zu AC, AD die mittleren geometrischen Proportionallinien AE, AF, so bestimmen die Punkte E, F die Mittelpunkte der gesuchten, den Punkt A berührenden Kreise.

Denn Kreisfläche $R : N : M = AC^2 : AF^2 : AE^2$
$= AC^2 : AC \,.\, AD : AC \,.\, AB$
$= AC : AD : AB$
$= 3 : 2 : 1.$

Aufgabe 220.

Einen gegebenen Kreis durch concentrische Kreislinien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Lösung. Fig. 209.

Theile den Halbmesser AC des gegebenen Kreises in die verlangte Anzahl gleicher Theile, z. B. in drei, so daß AB = BD = DC. Sucht man nun zu AC, CD, so wie zu AC, BC die mittleren geometrischen Proportionallinien CE, CF und beschreibt aus dem Mittelpunkte C mit den Halbmessern CE, CF die Kreise M, N, so ist durch sie das Verlangte geschehen.

$$\text{Kreisfläche } M : N : R = CE^2 : CF^2 : CA^2$$
$$= AC.CD : AC : CB : CA^2$$
$$= CD : CB : CA$$
$$= 1 : 2 : 3.$$

Berichtigungen.

S. 8. Z. 7. lies: Ziehe von E nach A eine Linie, so rc.
" " " 18. " CE statt CD.
" 23. " 19. " zieht man die Linie FB und von dem rc.
" 48. " 8. " lösche DL.
" 50. " 8. " einer der Seiten.

Bei dem

Bei dem Verleger sind noch folgende empfehlungswerthe Bücher und Landkarten erschienen:

Müller, J. W., auserlesene mathematische Bibliothek oder alphabetisches wissenschaftliches Verzeichniß der besten arithmetischen, algebraischen, geometrischen, trigonometrischen, geodätischen, mechanischen, optischen, astronomischen, geographischen, gnomonischen, chronologischen, architecktonischen u. militairischen Schriften. gr. 8. 2 fl. od. 1 Rthlr. 8 ggr.

— — ausführliche evidente Theorie der Parallellinien. Mit K. gr. 8. 48 kr. od. 12 ggr.

— — systematische Zusammenstellung der wichtigen bisher bekannten Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes. Mit einer ausführlichen Theorie der Zahlen-Dreiecke. Mit K. gr. 8. 1 fl. 15 kr. oder 20 ggr.

Auch unter dem Titel:

Mathematische und historische Beiträge und Ergänzungen zu J. J. J. Hoffmann's nestester Schrift: Der Pythagoräische Lehrsatz mit 32 Beweisen.

Ferner:

Drechsler, J. E., Werth und Vortrefflichkeit der Religion; ein Buch für denkende und gefühlvolle Jünglinge. 3te Aufl. gr. 8. broch. 54 kr. oder 14 ggr.

Gallerie der vorzüglichsten Klöster Deutschlands, histor., statist. und topographisch von mehreren beschrieben und herausg. v. Königl. Bibliothekar Jäck. I. Bandes 1te 2te Abthlg. M. K. 8. geh. Subscriptionspreis 2 fl. od. 1 Rthlr. 4 ggr.

Gerlach, J. P., Handbüchlein für die Sonntags-schulen in Deutschland. 2te verb. Aufl. gr. 8. geh. 36 kr. oder 9 ggr.

Hammer, C. F., neueste Karte von Europa mit angrenzenden Theilen von Asien und Afrika. Imp. Folio. 18 kr. oder 4 ggr.

— — Dieselbe mit einem Anhange, die Azorischen, Maderischen und Canarischen Inseln enthaltend. 24 kr. od. 6 ggr.

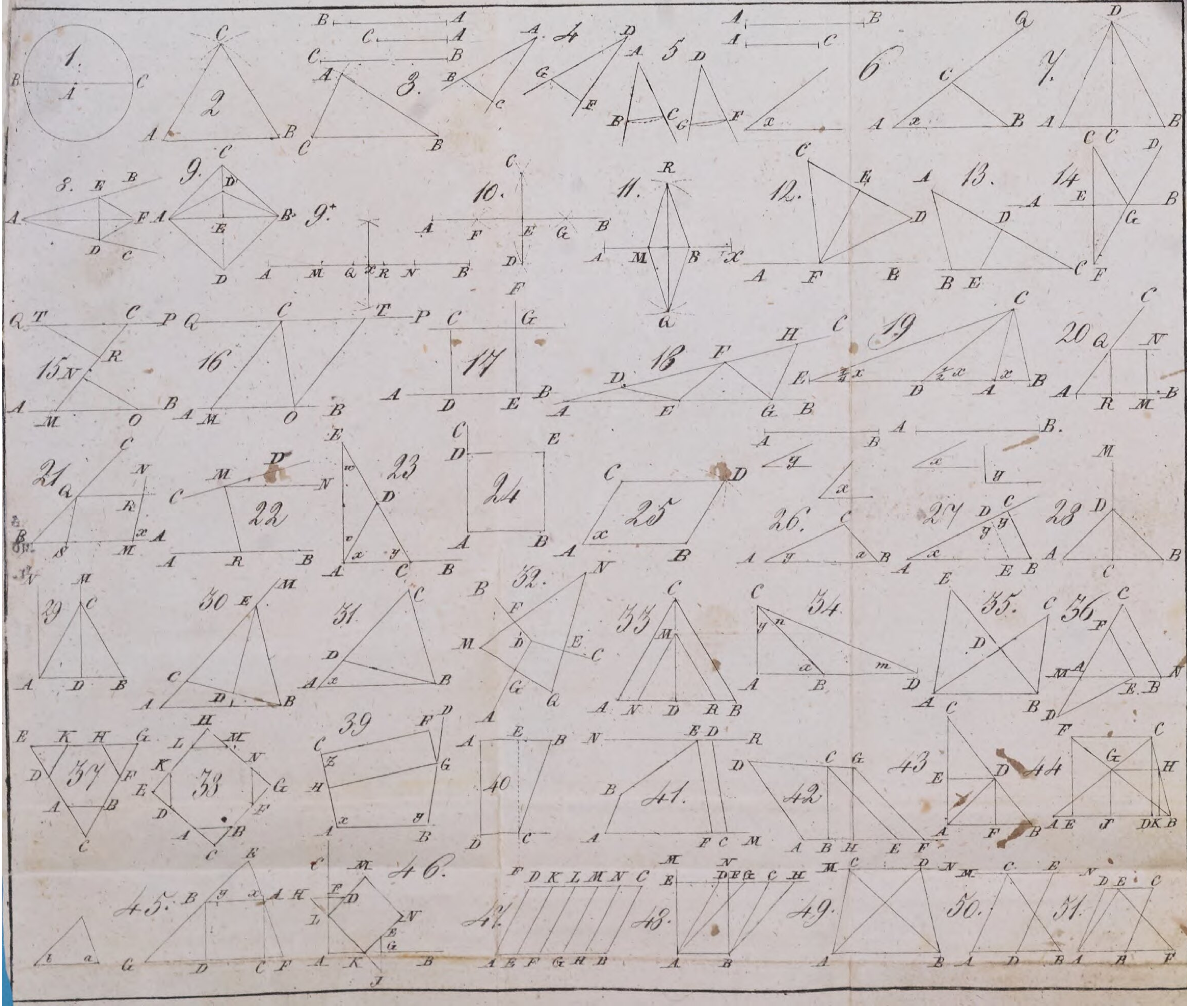
Kunst, die, in kurzer Zeit ein geschickter Schwimmer zu werden, nebst Klugheitsregeln für Badende. A. d. Engl. Mit 1 K. 8. 24 kr. od. 6 ggr.

Lappe, K., die Insel Felsenburg. Eine Robinsonade f. d. Jugend bearbeitet. Mit 4 K. u. 1 Karte. geb. 1 fl. od. 16 ggr.

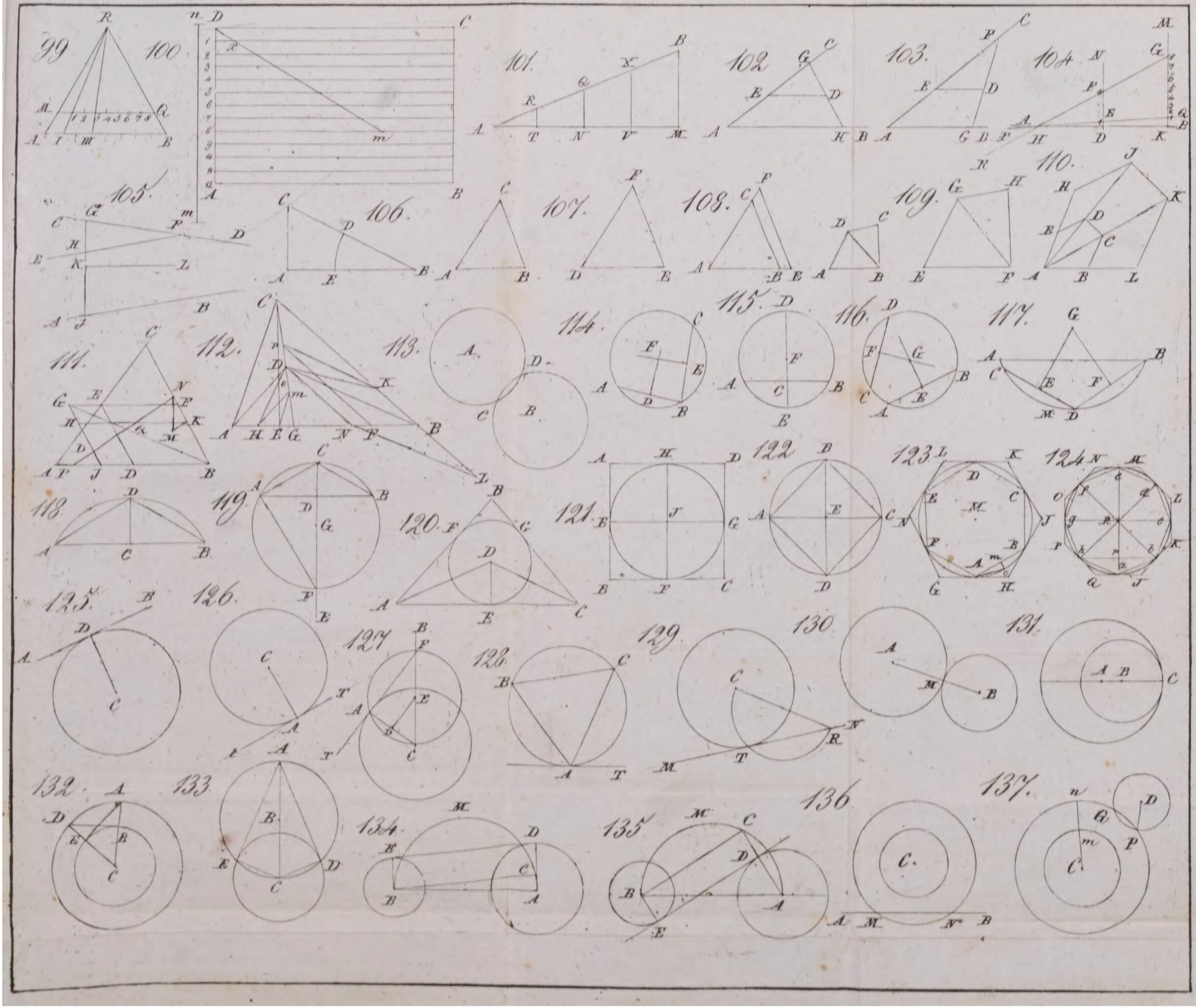
Meiner, W., Briefe für die Jugend zum Vorlesen, Diktiren und Nachbilden in der Schule u. beim Privat-Unterrichte. 2te Aufl. 8. geh. 48 kr. oder 12 ggr.

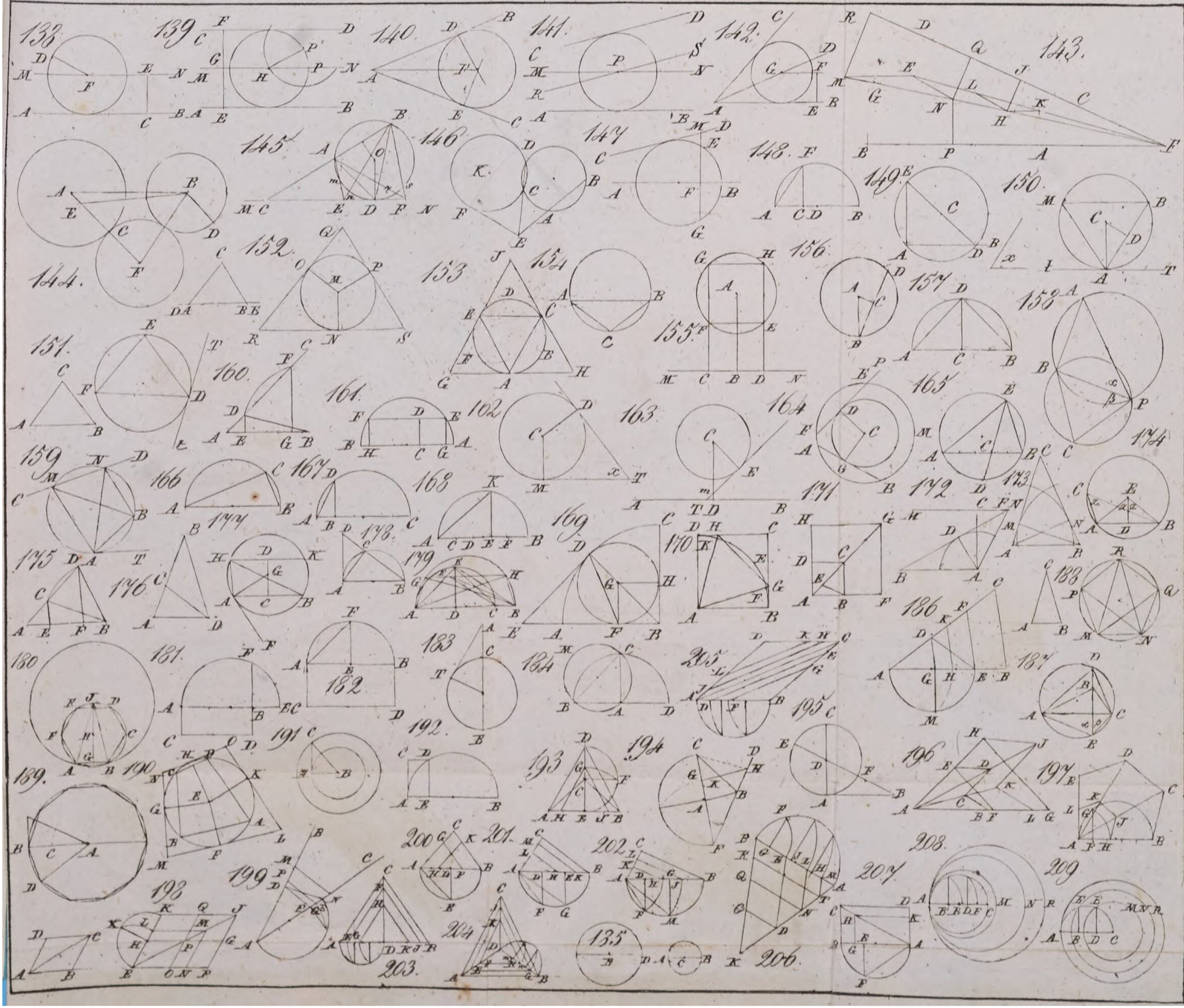
Nopitsch, C. C., Literatur der Sprichwörter au 31 Sprachen; ein Handbuch für Literatoren u Bibliothekare. 2te Aufl. gr. 8. geh. 2 fl. 30 k oder 1 Rthlr. 16 ggr.

Watts, Dr. J., merkwürdige Begebenheiten a der Geschichte der Menschen, oder Erzählungen wunderbarer Vorfälle, heldenmüthiger Thaten ꝛc. aus ältern und neuern Zeiten. A. d. Engl. übersetzt v. C. v. S. 2te Aufl. Mit 1 Kpfr. 8. geh. 1 fl. 30 kr. oder 20 ggr.



1.
2
3.
4
5
6
7.
8.
9.
9.+
10.
11.
12.
13.
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26.
27
28
29
30
31
32.
33
34
35.
36
37
38
39
40
41.
42
43
44
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.


99
100
101.
102
103.
104
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118
119.
120.
121.
122
123.
124.
125.
126.
127
128
129.
130.
131.
132.
133
134.
135
136
137.


138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
135

8° K.K
Woecke

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MIDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wöckel, Lorenz

Sammlung geometrischer Aufgaben aus der Planimetrie mit 4 Figurentafeln

Nürnberg 1834

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- K-K 684
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11255257-7